

APPUNTI DI FISICA QUANTISTICA

Alla fine dell'800, con la sistemazione della teoria elettromagnetica da parte di Maxwell, la fisica sembrava aver inquadrato in modo esaustivo tutti i fenomeni naturali allora noti. Tra la fine del secolo XIX e l'inizio del XX tutto l'edificio teorico costruito fu messo in crisi da una serie di esperimenti che non trovavano spiegazione nell'ambito delle leggi classiche.

Da un lato l'incompatibilità delle stesse equazioni di Maxwell con la relatività galileiana fece crollare l'edificio della meccanica newtoniana, che fino ad allora pareva inattaccabile, e portò alla nascita delle teorie relativistiche (1905-1916) dovute ad Einstein.

Dall'altro lato esperimenti riguardanti sistemi microscopici, in diverse zone dello spettro elettromagnetico, condussero alla formulazione delle ipotesi fondamentali della teoria dei quanti, nell'arco dei primi trent'anni del Novecento.

Inoltre il famoso esperimento di Thomson che dimostrò l'esistenza dell'elettrone come uno dei costituenti fondamentali della materia diede l'impulso all'evolvere della teoria atomica.

Lo studio di queste problematiche fu legato a molti scienziati: tra questi ricordiamo principalmente Bohr, Planck, Compton, Heisenberg, Pauli, Schrödinger e lo stesso Einstein.

I tre esperimenti cruciali che costrinsero i fisici ad una revisione di alcuni concetti della fisica classica e segnarono l'inizio della fisica dei quanti furono:

- l'irraggiamento termico del corpo nero;
- l'effetto fotoelettrico;
- l'effetto Compton.

IRRAGGIAMENTO DEL CORPO NERO.

Già alcuni fisici dell'800, quali Kirchhoff, Helmholtz, Clausius, si erano occupati della descrizione dell'irraggiamento termico, cioè della definizione di relazioni tra l'energia emessa e assorbita dai corpi, la temperatura e la lunghezza d'onda della radiazione.

I primi risultati già evidenziavano una relazione tra il potere emissivo, cioè l'energia emessa dal corpo per unità di tempo e di superficie, la lunghezza d'onda della radiazione e la temperatura assoluta.

Se indichiamo con Φ il flusso di energia incidente su un corpo, questo sarà suddivisibile in tre parti:

Φ_t = flusso di energia trasmessa, Φ_a = flusso di energia assorbita, Φ_r = flusso di energia riflessa.

Per il principio di conservazione dell'energia sarà: $\Phi = \Phi_t + \Phi_r + \Phi_a$. Se definiamo i tre numeri:

$a = \Phi_a/\Phi$, fattore di assorbimento, $t = \Phi_t/\Phi$, fattore di trasmissione, $r = \Phi_r/\Phi$, fattore di riflessione, avremo che $a + t + r = 1$.

Per ogni diversa lunghezza d'onda, ogni corpo possiede diversi valori di a , t ed r .

Si definisce corpo nero un corpo con $a = 1$ per tutte le lunghezze d'onda a qualsiasi temperatura, cioè un corpo in grado di assorbire tutta la radiazione, quindi di riemetterla.

Il corpo nero è un oggetto ideale; nella realtà un'ottima approssimazione del corpo nero si può ottenere tramite una "cavità radiante", cioè una scatola nera le cui pareti interne siano perfettamente riflettenti. In una delle pareti è praticato un piccolo foro.

Se una radiazione viene catturata dalla cavità, interagisce con la superficie interna di questa, fino a che si crea una situazione di equilibrio termico all'interno in corrispondenza di una certa temperatura.

A questo punto è possibile analizzare la radiazione uscente dal forellino relativa a quella data temperatura: essa riproduce fedelmente la radiazione contenuta all'interno.

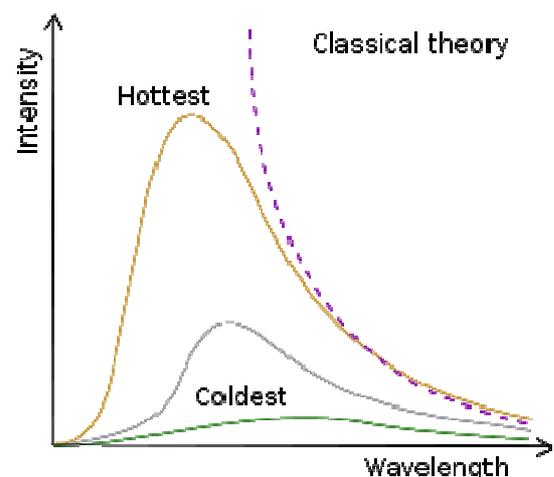
Stefan e Boltzmann riuscirono a stabilire che l'andamento di tale radiazione è legato alla temperatura assoluta dalla semplice legge:

$$P = \sigma \cdot T^4$$

dove P è il potere emissivo (energia per unità di tempo e di superficie), σ è la costante di Stefan-Boltzmann e vale $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$, costante universale, T è la temperatura assoluta. Questa legge vale solo per un corpo nero ideale.

Il risultato fondamentale è la dipendenza della radiazione dalla sola temperatura, quindi l'indipendenza da altre caratteristiche quali il materiale o la forma della cavità.

Nel corso di questi studi si erano ricavati grafici sperimentali descrittivi l'andamento dell'intensità della radiazione di corpo nero in funzione della lunghezza d'onda o della frequenza. Essi avevano un andamento di questo tipo:



$R\lambda$, la grandezza in ordinata nel grafico, è la radianza spettrale, cioè una grandezza tale che $R\lambda d\lambda$ è uguale al potere emissivo e la radianza totale, cioè l'energia messa su tutte le lunghezze d'onda, è data da:

$$R = \int_0^{\infty} R_{\lambda} d\lambda$$

Da tali grafici si evinceva che i massimi di intensità al crescere della temperatura corrispondevano a valori decrescenti di λ . Wien dimostrò a questo proposito che il prodotto $\lambda_{\max} \cdot T$ si mantiene costante.

Quella che è nota come legge dello spostamento di Wien è infatti: $\lambda_{\max} \cdot T = \alpha$, dove $\alpha = 2,8978 \cdot 10^{-3} m \cdot K$.

La legge può essere altresì espressa come proporzionalità diretta tra la frequenza di picco e la temperatura.

Da questo momento in poi molti fisici si cimentarono allo scopo di determinare una legge matematica che descrivesse in modo adeguato le curve sperimentali mettendo in relazione energia, lunghezza d'onda e temperatura. Lo stesso Wien scrisse una legge che, però, descriveva in modo soddisfacente le curve sperimentali solo per piccole lunghezze d'onda.

Il più significativo di questi risultati fu quello di Raleigh e Jeans, la cui legge si accordava bene con i dati sperimentali per grandi lunghezze d'onda (cioè basse frequenze) ma si allontanava molto da questi per piccole λ , (cioè alte frequenze). Inoltre tale legge non forniva una spiegazione della posizione dei massimi.

Raleigh e Jeans trattarono la cavità radiante come un contenitore di onde stazionarie, ad esempio nella luce rossa. Quindi considerarono il problema da un punto di vista ondulatorio classico, facendo l'ipotesi che non vi fossero altri modi di vibrazione all'interno della cavità, se non quelli relativi alle frequenze caratteristiche della scatola stessa, in analogia con i modi di vibrazione di una corda tesa con estremi fissi ($\lambda = 2L/n$, $n = 1,2,3,\dots$).

Secondo il principio di equipartizione dell'energia, nato nell'ambito della meccanica statistica, se E è l'energia contenuta nella cavità, ad ogni singola vibrazione spetterà un'uguale frazione dell'energia disponibile. Questo modo di trattare la questione porta ad alcuni paradossi. In realtà, per la legge delle onde stazionarie, vi sono infiniti modi di vibrazione al variare di n , l'energia sarebbe divisa tra infiniti modi e quindi ogni singola vibrazione avrebbe energia infinitamente piccola, cosa che nella realtà non accade. Si può pensare ad un pianoforte con infiniti tasti, come suggerisce il fisico premio Nobel Gamow, in cui se si suona un tasto con debole scambio di energia, l'energia trasmessa si smorza dopo breve tempo; se invece ci fosse fuga di energia attraverso le corde, i modi di vibrazione si propagherebbero a tutti i tasti di destra corrispondenti a suoni sempre più acuti (tutti gli armonici superiori). Suonando su un simile pianoforte si udirebbe una strana musica con suoni acuti e striduli. Analogamente la luce rossa nel cubo di Jeans si trasformerebbe in luce azzurra, violetta, poi in raggi X e raggi γ e così via senza alcun limite: di qui il termine "catastrofe ultravioletta", fatto che non si verifica nella realtà.

Il calcolo dell'energia totale fatto secondo le ipotesi di Raleigh e Jeans porta a un integrale divergente che dà, cioè, l'energia totale come infinita. Ciò è evidentemente assurdo.

Planck poté risolvere questo paradosso solo introducendo ipotesi rivoluzionarie, che egli stesso faticò ad accettare inizialmente, continuando a lungo a considerarle come meri artifici matematici. Trovò una legge perfettamente in accordo con i dati sperimentali, legge che correlava energia, lunghezza d'onda e temperatura, e tale per cui il calcolo dell'energia totale desse un risultato finito.

Planck considerò gli atomi delle pareti interne della cavità come piccoli oscillatori elettromagnetici vibranti ciascuno con una frequenza caratteristica. Essi emettono, come noto dalle leggi di Maxwell, energia elettromagnetica. Le due ipotesi fondamentali introdotte da Planck sono:

- un oscillatore può possedere solo energia multipla intera di una quantità minima finita cioè:

$$E = nhf, n = 1,2,3,4,\dots, \text{ dove } h \text{ è una costante di proporzionalità;}$$

- gli oscillatori non emettono energia con continuità ma soltanto per "pacchetti", cioè in quantità finite:

$$\Delta E = \Delta nhf = hf$$

Ognuno di questi pacchetti fu chiamato **quanto di energia** dal termine latino *quantum*.

Quindi l'energia non è distribuita con continuità ma è quantizzata: essa diventa una grandezza discreta così, come era già stato dimostrato in precedenza, per la carica elettrica. L'energia di ogni oscillatore può essere solo un multiplo esatto di una quantità fissata, dipendente dalla frequenza.

Inoltre un oscillatore, finché si trova nello stato di equilibrio, non emette e non assorbe energia: può emettere energia in quanti solo se è in stato eccitato.

Il postulato di Planck "dissuade" l'energia dallo sconfinare nelle regioni delle frequenze alte dello spettro. Infatti rimane possibile solo un numero discreto di valori di energia, pari a 1,2,3 ... volte il pacchetto di energia hf corrispondente alla frequenza data. Quanto più alta è la frequenza, tanto minore è il numero di possibili valori di energia sotto un livello fissato; questo fa sì che le vibrazioni ad alta frequenza non possano assorbire ulteriore energia da un certo valore di frequenza in su.

Facendo queste ipotesi Planck ricava per la radianza spettrale l'espressione:

$$R_{\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

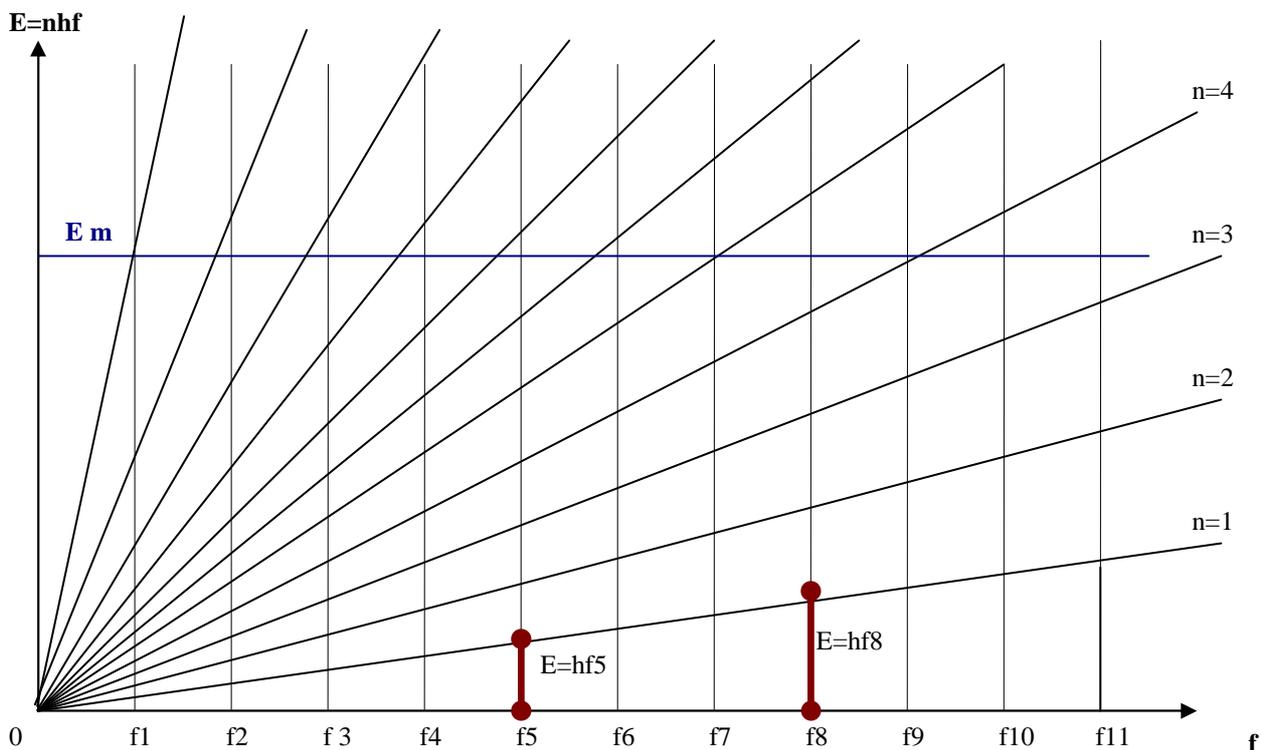
Inizialmente Planck determinò c_1 e c_2 come costanti empiriche, cioè in modo che si adeguassero alle curve sperimentali. In seguito trovò per via teorica le formule :

$$c_1 = 2 \pi c^2 h \quad c_2 = hc / k$$

dove c è la velocità della luce, h verrà chiamata “costante di Planck” e k è la costante di Boltzmann nota dalla teoria cinetica dei gas.

Inserendo per C_1 e C_2 i dati ricavati sperimentalmente, trovò che $h = 6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ e che k era appunto la costante di Boltzmann.

L'equazione di Planck si accordava perfettamente con le curve sperimentali in tutte le lunghezze d'onda ed inoltre la radianza totale calcolata a partire dalla sua equazione dava valore finito (infatti l'integrale divergente di Raleigh e Jeans si trasforma in una serie convergente, variando l'energia in modo discreto).



Gli stati di energia permessi sono rappresentati nel grafico dai punti di intersezione delle rette verticali corrispondenti alle varie frequenze con le rette che rappresentano la relazione $E = nhf$, per $n = 1, 2, 3, \dots$

La retta orizzontale E_m corrisponde all'energia media attribuibile ad ogni frequenza, per il teorema di equipartizione dell'energia, essendo l'energia totale finita, anche E_m è un valore non superabile.

Si nota che andando verso alte frequenze, il numero di stati di energia possibili diminuisce, poiché il salto quantico hf aumenta, spostandosi verso frequenze molto basse il numero di stati possibili aumenta, ma il salto quantico tende a zero. E' quindi possibile intuire come, sia spostandosi verso alte frequenze sia verso basse frequenze, l'energia totale corrispondente alla singola frequenza tenda a zero, in analogia con l'andamento dei grafici della radianza spettrale. Per ogni frequenza, vi è un numero discreto di “pacchetti” di energia, le frequenze sono infinite, in quanto ogni oscillatore atomico ha una frequenza qualsiasi: l'energia totale si ottiene sommando una quantità infinita, ma discreta, di pacchetti di energia. Si ottiene cioè una “serie” convergente, la cui somma è una quantità finita, come è giusto che sia, essendo l'energia presente nella cavità radiante finita.

Si può calcolare facilmente che per un oscillatore macroscopico, con i valori usuali di frequenza, massa ed energia, il numero n diventa enorme, tanto che la differenza tra n ed $n+1$ è impercettibile; il salto quantico hf è invece di dimensioni analoghe alla costante di Planck, cioè è piccolissimo, quindi altrettanto impercettibile. Ciò consente di trattare i fenomeni macroscopici trascurando gli effetti quantistici, senza incorrere in errori.

Il “**principio di corrispondenza**” afferma che i risultati della meccanica quantistica devono ridursi a quelli della meccanica classica nelle situazioni in cui l'interpretazione classica può essere considerata valida. Fu enunciato da Niels Bohr, il fisico danese che applicò la fisica dei quanti alla descrizione dell'atomo, e si rivelò

estremamente importante nella formulazione della teoria quantistica e quindi nella comprensione dei fenomeni che regolano il microcosmo.

Planck, tuttavia, era terribilmente spaventato e preferì credere inizialmente che i pacchetti di energia non fossero conseguenza delle proprietà peculiari delle onde luminose ma piuttosto proprietà intrinseche degli atomi che possono emettere e assorbire radiazione solo in quantità discrete.

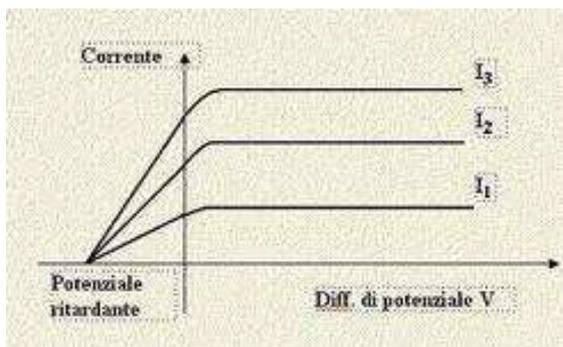
Le ipotesi di Planck, così difficili da accettare perfino da lui stesso, dovevano trovare conferma in altri esperimenti. Fu grazie ad Einstein che le ipotesi di Planck furono confermate e utilizzate nell'interpretazione delle onde luminose.

EFFETTO FOTOELETTRICO

La scoperta dell'effetto fotoelettrico risale al professore russo Stoletov ed è del 1872: consiste nell'inserimento di due piastre metalliche, tra cui è applicata una certa differenza di potenziale, in un tubo a vuoto spinto. Inizialmente non passa corrente elettrica nel vuoto, ma illuminando una delle due piastre con luce di una lunghezza d'onda opportuna (in generale nello spettro ultravioletto), si osserva passaggio di corrente elettrica. I dati sperimentali riguardanti l'andamento dell'emissione elettronica da parte del metallo, raccolti negli anni dai fisici che ripeterono l'esperimento, presentavano alcune caratteristiche non spiegabili mediante la teoria ondulatoria classica.

All'inizio del '900 fu Einstein, allora sconosciuto impiegato dell'ufficio brevetti di Berna, a riconsiderare il problema, ipotizzando che la quantizzazione dell'energia non fosse solo una proprietà degli atomi, come aveva proposto Planck; ma riguardasse davvero le onde elettromagnetiche.

Un fascio di luce monocromatica è inviato sulla piastra metallica. Tale piastra emette elettroni, che vengono accelerati da una d.d.p. e vengono raccolti da una collettore. La corrente elettronica viene misurata tramite un sensibile amperometro. La curva caratteristica è del tipo:

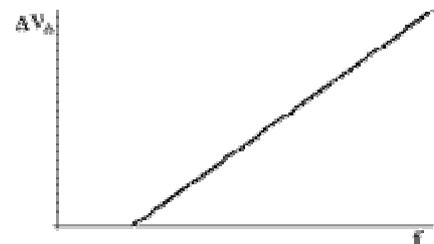


Si osserva che quando V è positivo, anche con un suo incremento, la corrente non aumenta all'infinito ma fino ad un valore di saturazione direttamente proporzionale all'intensità del fascio: la corrente di saturazione è raggiunta quando tutti gli elettroni emessi arrivano al collettore.

Invertendo il segno al potenziale, gli elettroni vengono decelerati: si vede che la corrente diminuisce per arrivare a 0 per un determinato valore V_0 , detto potenziale di arresto, che è indipendente dall'intensità del fascio incidente.

Per il principio di conservazione dell'energia, V_0 deve essere tale che: $eV_0 = E_{max}$, cioè il lavoro elettrico è uguale all'energia cinetica massima degli elettroni, quindi sufficiente per frenare la loro corsa.

Altro fatto notevole è che il potenziale d'arresto dipende dalla frequenza della luce. Infatti non vengono emessi elettroni finché la frequenza non supera un certo limite detto "frequenza di soglia", che varia da metallo a metallo. Oltre la frequenza di soglia il potenziale di arresto aumenta linearmente con l'aumentare della frequenza:



Vi sono, perciò, tre fatti che vanno contro la teoria ondulatoria:

1) L'energia cinetica dei fotoelettroni, secondo la teoria ondulatoria, dovrebbe aumentare aumentando l'intensità del fascio di luce. Invece l'energia cinetica massima non dipende dall'intensità della luce, infatti il potenziale d'arresto è lo stesso per tutte le intensità.

2) L'effetto fotoelettrico dovrebbe avvenire per qualunque frequenza, purché l'intensità del fascio sia sufficientemente alta. Invece esiste la frequenza di soglia al di sotto della quale non c'è emissione.

3) Secondo la teoria ondulatoria classica, dovrebbe esserci un ritardo temporale evidente tra l'assorbimento di energia da parte dell'elettrone e la sua emissione. Questo perché essendo la superficie di impatto di ogni elettrone estremamente piccola e l'energia assorbita proporzionale alla superficie di impatto, sarebbe necessario un certo tempo affinché l'elettrone assorba energia sufficiente per uscire dal metallo. Invece tale ritardo non era mai stato osservato.

Einstein introduce nuove ipotesi sulla natura della luce, sostenendo che l'energia da questa trasportata non ha andamento continuo, ma è concentrata in quantità finite chiamate in seguito "fotoni" da Lewis, nel 1926.

I pacchetti di luce sono del tipo $dE = hf$ e solo in questa forma gli elettroni possono assorbire energia. La quantizzazione è quindi proprietà insita nel trasporto di energia da parte delle onde elettromagnetiche e non solo una peculiarità degli atomi nell'atto di emissione o assorbimento, come aveva ipotizzato Planck.

Applicando queste ipotesi e il principio di conservazione dell'energia all'effetto fotoelettrico, Einstein scrive la semplice equazione: $hf = L + E_{\max}$

dove hf è l'energia totale posseduta dal fotone, L il lavoro di estrazione dal metallo; la restante energia è l'energia cinetica massima posseduta dall'elettrone.

Questa equazione risolve in modo semplice le tre contraddizioni precedenti. Infatti:

1) se si raddoppia l'intensità del fascio raddoppia il numero dei fotoni, quindi degli elettroni estratti, cioè la corrente, ma l'energia dei singoli fotoni e quindi il potenziale d'arresto restano invariati;

2) se l'energia cinetica massima è 0, allora $hf = L$, cioè l'energia minima per estrarre l'elettrone dal metallo deve essere uguale al lavoro di estrazione. Ciò, come si vede dall'equazione, dipende dalla frequenza della luce incidente. Al di sotto della frequenza di soglia, gli elettroni non hanno sufficiente energia per vincere le forze di coesione ed essere emessi;

3) l'assenza di ritardo nell'emissione è dovuta al fatto che l'energia è fornita in quanti e non in modo continuo. Pertanto nel momento in cui l'elettrone assorbe il quanto di energia viene subito emesso.

$$\text{Da } hf = L + E_{\max} \text{ si ottiene } hf = L + eV_0 \text{ e quindi } V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{L}{e}$$

Ciò significa che il potenziale d'arresto varia in modo lineare con la frequenza così come era stato sperimentato. Il coefficiente angolare della retta (h/e) è costante ed è determinabile sperimentalmente dal grafico su riportato. Millikan, il quale in quegli anni aveva ricavato il valore della carica dell'elettrone, verificò sperimentalmente anche la teoria di Einstein per l'effetto fotoelettrico. Avendo misurato e , gli fu possibile calcolare il valore di h . Si trovò per h un valore concordante con quello della costante di Planck. Ciò fu una conferma lampante della teoria dei quanti. Einstein vinse per la teoria dei fotoni il Nobel nel 1921.

EFFETTO COMPTON

Il terzo esperimento cruciale sull'interazione radiazione-materia fu fatto da Compton nel 1923. Consisteva nell'inviare un fascio di raggi X di definita lunghezza d'onda contro un blocchetto di carbone o grafite. Si osservava che la radiazione diffusa presentava due picchi di intensità: uno corrispondente alla lunghezza d'onda incidente, come ci si aspetterebbe dalla teoria ondulatoria classica (gli atomi entrano in risonanza con la radiazione incidente ed emettono onde della stessa lunghezza d'onda come un diapason che venga investito da un suono di frequenza adeguata); vi era, però, un secondo picco in una lunghezza d'onda maggiore.

La distanza tra i due picchi, $\Delta\lambda$, viene detta spostamento Compton ed è funzione dell'angolo di incidenza dei raggi X. Come si spiega la presenza del secondo picco?

Compton aveva utilizzato raggi X e non altre onde elettromagnetiche, come la luce, in quanto più energetici, in virtù della loro maggiore frequenza. In questo modo diventa trascurabile l'energia con cui gli elettroni esterni sono legati agli atomi, per cui essi possono essere considerati come liberi.

Radiazione incidente ed elettroni si comportano nell'esperimento come se si trattasse di un urto meccanico: l'elettrone viene espulso dall'atomo secondo una certa direzione e con una certa velocità e la traiettoria della radiazione incidente viene deviata. Si nota che vi è un picco di radiazione diffusa con una lunghezza d'onda maggiore di quella iniziale, cioè una frequenza minore: ciò fu spiegato da Compton con l'ipotesi che la radiazione incidente avesse caratteristiche "corpuscolari", fosse cioè composta di fotoni. Questi trasportano quantità di moto, oltre che energia. Compton tratta l'interazione fotone-elettrone come se si trattasse di un urto elastico tra palle da biliardo. Nell'urto la radiazione perde parte della sua energia, e pertanto la radiazione che riemerge dopo l'urto possiede una minore frequenza, quindi una lunghezza d'onda maggiore.

L'effetto Compton è particolarmente evidente per lunghezze d'onda piccole, ma è trascurabile per grandi λ .

I tre esperimenti considerati, comunque, - irraggiamento termico, effetto fotoelettrico, effetto Compton -, si estendono, nel loro complesso a gran parte dello spettro elettromagnetico e sono pertanto una conferma dell'applicabilità della teoria dei quanti alla radiazione elettromagnetica.

MECCANICA ONDULATORIA

Negli anni '20 del '900 era ormai fuori discussione l'aspetto corpuscolare delle onde elettromagnetiche, appurato con gli esperimenti sull'irraggiamento termico, sull'effetto fotoelettrico e sull'effetto Compton. D'altro canto la teoria di Maxwell del campo elettromagnetico continuava ad essere valida ed estremamente coerente nel descrivere l'aspetto ondulatorio della luce. Questo comportamento bivalente della luce dovette essere accettato in quanto le onde elettromagnetiche evidenziavano caratteristiche di onda e particella a seconda dell'esperimento svolto.

Il fisico francese Louis duca di De Broglie azzardò l'ipotesi che, se l'energia aveva questa ambivalenza nel comportamento, anche la materia poteva presentare la stessa dualità.

De Broglie considerò che, se un elettrone possedeva caratteristiche ondulatorie, tale doveva essere il suo comportamento anche lungo la sua orbita. In questo caso l'onda generata dall'elettrone doveva essere di tipo stazionario in analogia con le onde su una corda tesa ad estremi fissi. Essendo l'orbita chiusa, deve valere la seguente relazione tra raggio orbitale e lunghezza d'onda:

$$2 \pi r = n \lambda \quad (1)$$

Se così non fosse, l'onda non si manterrebbe ma si annullerebbe per interferenza distruttiva. Partendo dai risultati di Bohr sulla struttura dell'atomo, si sa che il momento angolare è quantizzato:

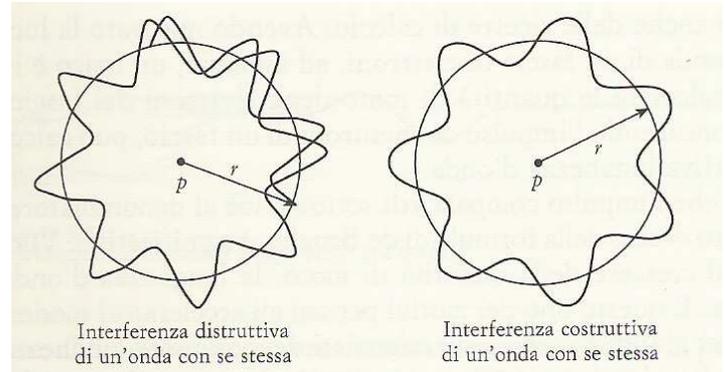
$$l = mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

e si può ricavare l'uguaglianza:

$$2 \pi r = \frac{h n}{m v}$$

Questa equazione confrontata con la (1) fornisce:

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$



che descrive la lunghezza d'onda attribuibile a una particella di massa m e velocità v .

Considerando che fenomeni ondulatori, quali la diffrazione, avvengono solo se le dimensioni di un ostacolo sono paragonabili a quelle della lunghezza d'onda incidente, valutando all'incirca quanto dovesse essere la λ dell'elettrone, si tentò di sperimentare quanto ipotizzato usando come reticolo di diffrazione un cristallo.

La verifica diretta dell'aspetto ondulatorio delle particelle fu ottenuta da Davisson e Germer e, indipendentemente, da G.P.Thomson nel 1927. (Si noti che il padre J.J. Thomson aveva evidenziato, col suo famoso esperimento, la natura corpuscolare della particella elettrone).

Se si considera una particella di massa $10^{-5} g$ e di velocità pari a qualche cm/s ad essa sarà associata una lunghezza d'onda di circa $10^{-22} m$, assolutamente non osservabile.

Per un elettrone, che si muova a una velocità elevata, dell'ordine di $10^7 m/s$, la lunghezza d'onda è di circa 1 Angstrom, misura confrontabile con la lunghezza d'onda dei raggi X.

Davisson e Germer verificarono la correttezza dell'ipotesi di De Broglie con un esperimento di diffrazione degli elettroni. I risultati sperimentali furono simili a quelli ottenuti con i raggi X e l'esame delle figure di diffrazione confermarono la relazione di De Broglie.

Sembrava allora appurato che anche le particelle materiali possedessero in alcuni esperimenti proprietà di tipo ondulatorio senza per questo entrare in contraddizione con le leggi della quantizzazione dell'energia.

Che significato attribuire a questo comportamento di tipo ondulatorio?

EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER E PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE.

Ad ogni onda nota in fisica è associata una funzione $\Psi(\mathbf{r}, t)$ che descrive il campo fisico variabile nell'onda stessa, per esempio: l'ampiezza y nelle onde di una corda vibrante, la pressione nelle onde sonore, il campo elettrico nelle onde elettromagnetiche.

Per quanto riguardava le onde materiali, si introdusse la funzione d'onda Ψ la quale non era però connessa a nessun ente fisico, ma possedeva caratteristiche tali da renderla atta alla descrizione dei fenomeni trattati. Questa funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$ è soluzione di un'equazione differenziale del second'ordine introdotta da Schrödinger nel 1926. Schrödinger partì dall'osservazione di Hamilton che le leggi della meccanica classica possono essere messe in relazione con le leggi dell'ottica geometrica: le leggi dell'ottica ondulatoria si riducono a quelle dell'ottica geometrica quando la lunghezza d'onda tende a zero.

Cercò quindi di interpretare le leggi della meccanica classica come limiti di leggi più generali di una meccanica ondulatoria che potesse spiegare le apparenti assurdità sperimentali.

L'equazione di Schrödinger, in una forma semplificata rispetto alla sola dimensione x , è:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \psi(x, t) = 0$$

da cui si ottiene la soluzione : $\psi(x, t) = e^{\frac{2\pi i}{h}(px - Et)}$.

Una forma dell'equazione completa, riguardante una variabile spaziale e una temporale, è:

$$\Delta^2 \Psi(x, t) - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U(x) \Psi(x, t) + \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = 0$$

Questa equazione fu ottenuta da Schrödinger partendo da un'equazione del tipo di quelle delle onde elettromagnetiche, introducendovi l'ipotesi di De Broglie: $p\lambda = h$.

La funzione soluzione di questa equazione, per poter interpretare le onde materiali, doveva soddisfare alcuni requisiti:

- doveva valere il principio di sovrapposizione delle onde di Fourier;
- la soluzione doveva descrivere completamente lo stato dinamico del sistema in un istante qualsiasi conoscendo il valore all'istante t_0 ;
- la soluzione doveva rispettare le ipotesi di De Broglie;
- i risultati dovevano essere in accordo con le leggi della meccanica classica, ottenibili facendo tendere λ a zero.

Infatti, per un oggetto in movimento osservabile a occhio nudo, la lunghezza d'onda è talmente piccola che non è pensabile poterla misurare. Per esempio, se per un elettrone di massa $0,9 \cdot 10^{-30}$ kg che si muove con velocità 10^6 m/s, la lunghezza d'onda è $7 \cdot 10^{-10}$ m, invece per una massa di 1 kg che si muove a velocità di 10^3 m/s, la lunghezza d'onda è di $6,6 \cdot 10^{-37}$ m!

La funzione Ψ è una funzione a valori complessi; calcolandone il modulo al quadrato, si ha che $|\Psi|^2$ è quantità reale e funzione solamente dello spazio.

Essa assume un significato fisico, secondo l'interpretazione di Born, che è la probabilità per unità di volume di trovare la particella; per la funzione così trovata vale la proprietà di normalizzazione tipica di ogni funzione di probabilità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \Delta V = 1$$

. Ciò garantisce l'esistenza della particella in qualche luogo nello spazio.

Il prodotto $|\Psi|^2 \Delta x$ rappresenta la probabilità che la particella si trovi nell'intervallo spaziale Δx .

La proprietà di normalizzazione vale indipendentemente dal tempo e per qualsiasi Ψ soluzione dell'equazione di Schrödinger.

Questa interpretazione della funzione d'onda fu data per primo dal premio Nobel Max Born. Egli dimostrò che anche le onde di De Broglie in realtà non sono altro che onde di probabilità; non possono essere interpretate come onde fisiche classiche ma solo come l'andamento della probabilità di trovare la particella in una zona dello spazio.

E' nettamente in contrasto con i concetti della fisica classica il fatto che non si possa stabilire dove è la particella con precisione, ma solo dove è probabile trovarla.

La probabilità era già entrata nella fisica solo nella meccanica statistica, dove ciò si era reso necessario trattandosi di gas, cioè di sistemi costituiti da grandi numeri di particelle ed essendo pertanto misurabili soltanto valori medi statistici. In questo caso il risultato probabilistico è indipendente dal numero delle particelle, ma rappresenta un limite teorico, non solo sperimentale, nella possibilità di individuare con esattezza una grandezza fisica.

In quegli anni (1927) Heisenberg formulò il noto principio che tolse definitivamente l'illusione classica di dominare le leggi della natura in senso deterministico.

L'enunciato del principio di indeterminazione è: “Non si possono misurare simultaneamente, con precisione arbitrariamente grande, la quantità di moto e la posizione di una particella, nel senso che l'aumento di precisione in una delle due misure comporta un peggioramento dell'errore nell'altra misura”.

Il principio si generalizza anche ad altre coppie di grandezze fisiche dette coniugate, come ad esempio energia e tempo. Una formulazione matematica del principio, proiettando la relazione nelle tre direzioni spaziali, è:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h$$

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq h$$

$$\Delta p_z \cdot \Delta z \geq h$$

Il prodotto dei due errori non può mai essere inferiore alla costante di Planck.

Consideriamo un esperimento ideale per capire meglio il significato del principio.

Un fascio di elettroni viene diffratto da una fenditura di ampiezza $d = \Delta y$ e forma una figura di diffrazione su uno schermo.

Lo scopo è misurare posizione e velocità dell'elettrone nella direzione y . L'elettrone passa attraverso la fenditura; la sua posizione, ovviamente, è nota con un margine di errore pari a: $d = \Delta y$. Si può migliorare la valutazione della posizione restringendo la fenditura. In tal modo, però, si allarga la figura di diffrazione ottenuta sullo schermo. Considerando l'elettrone che cade nel primo minimo di diffrazione questo avrà velocità v ; la componente della velocità nella direzione y sarà V_y . Assumiamo, come errore sulla misura di V_y , la quantità ΔV_y . Per le leggi della diffrazione da una fenditura si ha che per il primo minimo vale la relazione:

$$\text{sen } \vartheta = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

Inoltre la componente della velocità nella direzione y è: $V_y = V \text{sen } \theta$; assumiamo come errore: $\Delta V_y = V \text{sen } \theta$. Si ottiene allora $\text{sen } \theta = \Delta V_y / V$. Dal confronto con la formula precedente si ha:

$$\frac{\Delta v_y}{v} \approx \frac{\lambda}{\Delta y} \quad \text{e quindi} \quad \Delta v_y \cdot \Delta y \approx \lambda v$$

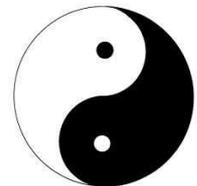
$$\text{allora essendo} \quad \lambda = \frac{h}{m v} \quad \text{si ottiene} \quad \Delta v_y \cdot \Delta y \approx \frac{h v}{m v}$$

$$\text{e infine:} \quad \Delta p_y \cdot \Delta y \approx h$$

Riducendo Δy si estende la figura di diffrazione quindi aumenta l'errore su p_y . Quindi più affiniamo la precisione nella misura delle grandezze corpuscolari, maggiore sarà l'errore nella determinazione delle grandezze caratterizzanti l'aspetto ondulatorio e viceversa.

Con considerazioni simili si può dimostrare che la stessa relazione vale per energia e tempo: $\Delta E \cdot \Delta t \approx h$, dove ΔE rappresenta il minimo di indeterminazione su E e Δt il tempo che abbiamo a disposizione per misurare E .

Bohr sintetizzò il dualismo di comportamento nella totalità dei fenomeni fisici con il **“principio di complementarità”**, una sorta di principio “meta-fisico” che esprime un'affermazione non interna alla teoria fisica, ma sulla teoria fisica: le due nature, ondulatoria e corpuscolare, sia della materia sia della radiazione, sono complementari l'una dell'altra. Non è possibile né per la materia né per la radiazione dimostrare l'unicità delle proprietà ondulatorie e corpuscolari.



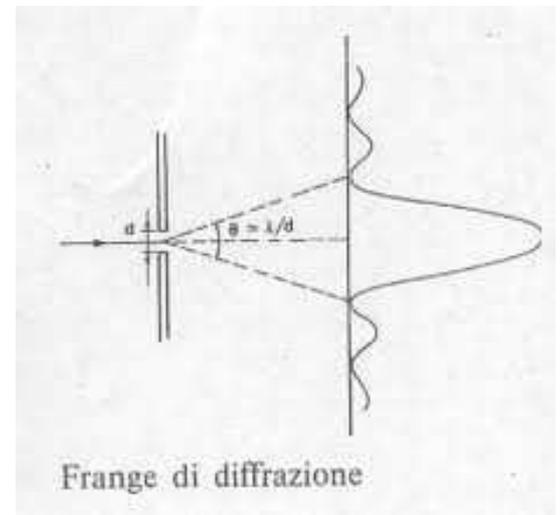
Il principio di indeterminazione sconvolse la concezione classica della fisica e, per questo, la sua interpretazione dette luogo a non pochi errori e fraintendimenti.

Inoltre ebbe ripercussione anche al di fuori della fisica stessa, modificando necessariamente anche la concezione filosofica della scienza e suscitando a volte applicazioni discutibili in altri ambiti.

Infatti, essendo il principio indipendente dal grado di precisione e di raffinatezza dello strumento utilizzato per la misura, il suo significato profondo è di portata generale, cioè sottrae all'uomo la possibilità di poter osservare i fenomeni naturali con precisione sempre crescente in virtù “solamente” del miglioramento delle tecnologie. Non è dato di indagare nella natura microscopica oltre certi limiti teoricamente predetti, limiti intrinseci e non contingenti. Della natura non si può avere informazione completa, ma soltanto massima, il massimo essendo raggiunto solo nei limiti del principio. Come scrisse Heisenberg: “non possiamo conoscere il presente in tutti i suoi dettagli”.

Una delle conseguenze cruciali del principio è che, nel trattare sistemi fisici, non è possibile prescindere dal ruolo dell'osservatore. Nella fisica classica l'osservatore era esterno totalmente al sistema osservato e pertanto non lo influenzava, o meglio lo influenzava in maniera trascurabile. Nella microfisica ciò non è più possibile: non appena si osserva un sistema, lo si perturba in un modo non esattamente noto e pertanto l'osservatore diventa inesorabilmente uno dei protagonisti. Mentre il moto di una pallina da tennis in movimento non è perturbato in modo significativo dalle onde luminose che permettono l'osservazione, essendo la quantità di moto dei fotoni trascurabile rispetto a quella della pallina, per quanto concerne una particella quale un elettrone, è comprensibile che i fotoni possano modificare in misura notevole lo stato dell'elettrone osservato.

Le quantità Δp e Δx moltiplicate nella relazione di Heisenberg riguardano misure che possono essere prese come condizioni iniziali, nella consapevolezza che la determinazione esatta dell'una toglie senso alla



determinazione dell'altra. Nulla di certo si può predire riguardo all'evoluzione del sistema fisico nel futuro, a differenza che nella fisica classica, dove, nella meccanica deterministica di Laplaciana memoria, il sistema, date le condizioni iniziali, aveva una sola possibilità di evoluzione. Si può soltanto valutare, tramite l'equazione di Schrödinger, la probabilità che il sistema evolva in un modo piuttosto che in un altro.

N:B: In realtà l'equazione di Schrödinger è assolutamente deterministica, nel senso che, noto lo stato del sistema all'istante t (cioè l'insieme dei valori numerici delle grandezze che possono essere misurate simultaneamente), essa permette di calcolare lo stato del sistema in un istante futuro, cioè la funzione d'onda relativa a quell'istante, ma la funzione Ψ ottenibile dall'equazione di Schrödinger descrive una distribuzione probabilistica. Se una grandezza, caratterizzante lo stato del sistema, è nota all'istante t_0 in modo determinato, l'equazione mi consente di determinarne la misura all'istante futuro t_1 , se una grandezza non è nota in modo determinato, l'equazione di Schrödinger mi consente di determinare la probabilità di ogni valore possibile per la sua misura all'istante futuro t_1 .

Lo stesso Heisenberg scrisse vari testi sul significato filosofico sotteso alla nuova fisica; l'idea di "oggetto fisico" è modificata, il fisico suggerisce di parlare di "onde di materia" piuttosto che di particelle; i termini "posizione, velocità, quantità di moto, traiettoria" diventano inadatti alla rappresentazione della nuova teoria. Il linguaggio è inadeguato mentre il formalismo matematico sembra esprimere tutto ciò che si può dire, in modo più pregnante delle parole. Le grandezze definite in senso operativo dalla fisica classica, definite proprio a partire dalla possibilità della loro misurazione, ora perdono il loro significato classico in virtù dell'operazione stessa di misura. L'operazione di misura altera il sistema, l'incontro fotone-elettrone può avvenire in molti modi e ciò che misuro "dopo" non era esattamente prevedibile "prima" ed è stato influenzato dal mio intervento di misurazione.

Riportiamo un esempio di Heisenberg. Se cerco di osservare un elettrone lungo la sua orbita, utilizzo fotoni di lunghezza d'onda molto piccola, necessariamente più piccola della dimensione dell'atomo, limitando l'errore di posizione alla lunghezza d'onda, posso così definire posizione e quantità di moto iniziali nei limiti del principio di indeterminazione; un fotone possiede una quantità di moto molto più grande di quella dell'elettrone, un solo quantum sposterà quindi l'elettrone dalla sua orbita allontanandolo dall'atomo. Vi sarà quindi, in una seconda fase, un pacchetto d'onde che non gira intorno al nucleo ma si allontana dall'atomo, non si può parlare né di orbita né di traiettoria, né si possono fare affermazioni su posizione e velocità dell'elettrone in questa fase compresa tra la prima e la seconda osservazione. In seguito, una seconda misurazione consentirà di stabilire in che modo, tra i tanti possibili, l'elettrone si è allontanato dall'atomo.

La conoscenza della funzione d'onda non permette in generale di stabilire con precisione i risultati delle singole operazioni di misura. Un sistema, nella fase della sua evoluzione, si comporta in modo deterministico, nel senso che l'equazione di Schrödinger ci permette di seguire l'andamento della funzione d'onda fintanto che il sistema è isolato; il sistema "collassa" in maniera del tutto casuale e non prevedibile verso uno degli stati permessi dalla funzione di probabilità, nel momento in cui si interviene sul sistema per eseguire delle operazioni di misura, cioè per passare dalla funzione d'onda a dei numeri.

Scriva Heisenberg: <<Perciò, l'interpretazione teoretica di un esperimento richiede tre stadi distinti: (1) traduzione della situazione sperimentale in una funzione di probabilità; (2) accompagnamento di questa funzione lungo il corso del tempo; (3) determinazione di una nuova misurazione del sistema il cui risultato può poi essere calcolato dalla funzione di probabilità. Per il primo punto è condizione necessaria la determinazione delle relazioni di incertezza. Il secondo punto non può venir descritto in termini di concetti classici; non vi è alcuna descrizione possibile di ciò che accade al sistema tra l'osservazione iniziale e la nuova misurazione. E' soltanto nella terza fase che passiamo di nuovo dal "possibile" al "reale">>.

A questo proposito è spesso citato il paradosso del "gatto di Schrödinger".

Il paradosso fu in realtà proposto da Einstein, e riguardava una bomba. Einstein lottò per anni, inventando esperimenti ideali mirati a confutare la teoria quantistica, di cui non accettava l'aspetto di casualità e imprevedibilità, essendo profondamente legato al "principio di causalità" che regna anche nella teoria della relatività. Famose le frasi "Dio non gioca a dadi" e "Preferirei fare il ciabattino, o forse il biscazziere, invece del fisico..." (se la fisica andasse in questa direzione, n.d.R.). Schrödinger, nella diatriba intorno agli aspetti apparentemente assurdi della meccanica quantistica, stava abbastanza sulla sponda conservatrice, a differenza di Bohr e Heisenberg, e rese l'idea ancora più "paradossale" applicando l'esempio a un gatto.

<< Si possono anche costruire casi del tutto burleschi. Si rinchioda un gatto in una scatola d'acciaio insieme alla seguente macchina infernale (che occorre proteggere dalla possibilità d'essere afferrata direttamente dal gatto): in un contatore Geiger si trova una minuscola porzione di sostanza radioattiva, così poca che nel corso di un'ora forse uno dei suoi atomi si disintegrerà, ma anche, in modo parimenti probabile, nessuno; se l'evento si verifica il contatore lo segnala e aziona un relais di un martelletto che rompe una fiala con del cianuro. Dopo avere lasciato indisturbato questo



intero sistema per un'ora, si direbbe che il gatto è ancora vivo se nel frattempo nessun atomo si fosse disintegrato, mentre la prima disintegrazione atomica lo avrebbe avvelenato. La funzione Ψ dell'intero sistema porta ad affermare che in essa il gatto vivo e il gatto morto non sono degli stati puri, ma miscelati con uguale peso. » (Erwin Schrödinger)

E' noto che, valendo il principio di sovrapposizione per le funzioni d'onda, se un sistema ammette lo stato Ψ_1 e lo stato Ψ_2 , tra loro incompatibili, ammette anche una qualunque combinazione lineare dei due, cioè $\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$, dove a e b sono le ampiezze di probabilità relative ai due stati. Nel caso del gatto, finché il gatto è chiuso nella stanza, la sua funzione d'onda comprende la possibilità "gatto vivo + gatto morto". Nel momento in cui si apre la porta per osservare il gatto, il sistema gatto collassa comunque verso uno dei due stati, vivo o morto.

L'esempio di Schrödinger appare oggi un po' superficiale in quanto non è molto sensato parlare dello stato quantico di un gatto; l'interazione continua e molto complessa degli innumerevoli atomi che compongono il gatto non permette di fissare, se non per un istante fugace, uno stato complessivo corrispondente esattamente a "vivo + morto". Le proprietà del gatto osservabili sono quelle che rimangono pressoché costanti, cioè i suoi attributi classici, compreso il fatto che o è vivo o è morto.

Bohr era più vicino di altri all'idea che il gatto non potesse avere un comportamento quantistico...

L'equazione di Schrödinger presenta difficoltà di soluzione in generale, ma vi sono particolari situazioni fisiche che ne facilitano l'interpretazione. Si tratta degli stati stazionari nei quali la funzione d'onda oscilla intorno ad un andamento medio senza variare nel tempo.

I problemi stazionari nel mondo microscopico riguardano atomi, molecole, cristalli, tutti oggetti dotati di struttura piuttosto stabile nel tempo. L'applicazione dell'equazione di Schrödinger a questi sistemi ebbe successo e fornì una dimostrazione alle ipotesi della quantizzazione dell'energia di Planck e di Bohr.

L'equazione di Schrödinger riassume in sé le ipotesi fondamentali della meccanica quantistica e della meccanica ondulatoria: essa è la base per la spiegazione di tutta la complessa fenomenologia riguardante l'atomo, la molecola e certe proprietà macroscopiche della materia non interpretabili con la meccanica classica.

L'equazione di Schrödinger fu ulteriormente generalizzata dal fisico inglese Paul Dirac, il quale ne scrisse una formulazione che rendeva perfettamente conto di tutti i dati dell'esperienza.

Infatti la prima equazione di Schrödinger non era invariante per le trasformazioni di Lorentz, cioè non era in accordo con la teoria della relatività; inoltre non se ne deduceva per via teorica l'esistenza dello spin. L'equazione di Dirac prevede invece queste due proprietà; da essa inoltre scaturì una nuova sorprendente indicazione, cioè l'esistenza dell'antimateria.

Infatti Dirac dimostrò che le soluzioni della sua equazione si dividono in due categorie: soluzioni con energia positiva (somma dell'energia a riposo e dell'energia cinetica) corrispondenti agli elettroni noti; soluzioni a energia negativa che da un punto di vista classico potrebbero essere scartate.

Nella meccanica quantistica sono possibili salti quantici con energia maggiore o minore di zero, e questo condusse a ipotizzare l'esistenza di elettroni con carica positiva, detti positroni. Questi furono sperimentalmente osservati nel 1932 da Anderson.

Divenne sempre più chiaro, poi, che quello dell'elettrone non era un caso isolato, ma per ogni particella esiste una antiparticella.

Bibliografia

- G.Gamow, Trent'anni che sconvolsero la fisica, Zanichelli, 1966
- D.Hallyday, R. Resnick, Fondamenti di Fisica 3, Zanichelli, 1990
- W.Heisenberg, Fisica e Filosofia, Il Saggiatore, 2011
- W.Heisenberg, Indeterminazione e realtà, Guida, 2002
- W.Hesenberg, Lo sfondo filosofico della fisica moderna, Sellerio, 1999
- D.Lindley, Incertezza, Le Scienze, 2012
- G.Longhi, Appunti di Fisika Quantistika