Calcolo della probabilità

GLI EVENTI

Un **evento** è un fatto che può accadere o non accadere. Se esso avviene con certezza si dice **evento certo**, mentre se non può mai accadere si dice **evento impossibile**. Gli eventi che possono accadere in modo casuale si dicono **aleatori**, essi sono i possibili esiti di un **esperimento** che non dipende da una legge determinata. Un singolo esito si dice **evento elementare** o **campione**.
L'insieme degli eventi elementari costituisce lo **spazio dei campioni,** l'insieme delle parti dello spazio dei campioni costituisce lo **spazio degli eventi.** Un evento è certo se coincide con lo spazio dei campioni, è impossibile se coincide con l'insieme nullo.

Esempio

Un'urna contiene tre palline gialle numerate da 1 a 3 e due palline nere recanti i numeri 1 e 2. Estraiamo una pallina dall'urna. Scriviamo:

a) gli eventi aleatori elementari;
b) alcuni eventi aleatori formati da più eventi elementari

a) Gli eventi aleatori <u>elementari</u> sono:
   E_1 = "esce la pallina gialla con il numero 1"
   E_2 = "esce la pallina gialla con il numero 2"
   E_3 = "esce la pallina gialla con il numero 3"
   E_4 = "esce la pallina nera con il numero 1"
   E_5 = "esce la pallina nera con il numero 2"

b) G = "esce una pallina gialla"
   A = "esce una pallina con il numero 1"
   P = "esce una pallina con il numero pari"

LA CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

La definizione classica di probabilità si riferisce a un gruppo <u>completo</u> di eventi (cioè tali che la loro unione sia l'insieme universo) e a due a due <u>incompatibili</u> (cioè tali che la loro intersezione si l'insieme vuoto).
La probabilità di un evento E, secondo l'impostazione classica, si calcola facendo il rapporto fra il numero *f* dei casi favorevoli e il numero *u* dei casi possibili, supponendo tutti i casi equiprobabili:
$p(E) = \frac{f}{u}$.
La probabilità assume un valore compreso tra 0 e 1 essendo f sempre minore o uguale a u.
Se l'evento è impossibile, la probabilità è 0; se l'evento è certo, la probabilità è 1.
Si dice **evento contrario** di E un evento che si verifica quando e solo quando non riverifica E.
La probabilità del non verificarsi di E, cioè dell'evento contrario $\overline{E}$, è $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

Esempio

Estraiamo una carta da un mazzo di 40. Dato l'evento A = "esce una carta con un valore minore di 7" ha come evento contrario $\overline{A}$ = "non esce una carta con un valore minore di 7" o anche $\overline{A}$ = "esce una carta con un valore maggiore o uguale a 7":

$$p(A) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}, \qquad p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

LA CONCEZIONE STATISTICA DELLA PROBABILITÀ

La **probabilità di un evento E**, secondo l'impostazione **statistica** (o **frequentistica**), è la sua frequenza relativa, cioè il rapporto fra il numero delle volte *m* che si è verificato un fenomeno e il numero delle prove *n* effettuate nelle stesse condizioni (n deve essere elevato): $f(E) = \frac{m}{n}$.

Essa può essere calcolata solo a posteriori dopo aver fatto un certo numero di esperimenti.
Alla base di questa impostazione c'è la **legge empirica del caso**. Essa afferma che:
"la frequenza relativa di un evento E, all'aumentare del numero di prove effettuate, tende alla probabilità dell'evento".
Ad esempio, la probabilità che lanciando una moneta esca testa è ½. Lanciando la moneta moltissime volte si potrà vedere che la frequenza relativa dell'evento "testa" tende tanto più al valore 1/2 quanto più il numero di lanci è alto.

Esempio
In un poligono di tiro, un atleta su 1600 tiri ha colpito 1525 volte il centro. Possiamo valutare che la probabilità che l'atleta successivamente centri il bersaglio sia $f = \frac{1525}{1600}$.

LA CONCEZIONE SOGGETTIVA DELLA PROBABILITÀ

La probabilità di un evento E, secondo l'impostazione soggettiva, è il rapporto tra il prezzo P che una persona ritiene equo pagare e la vincita che riceverà al verificarsi di E: $p(E) = \frac{P}{V}$.

Esempio
Un barista ha creato un nuovo tipo di cocktail e scommette 12 euro contro 8 euro di un suo collega che otterrà un alto gradimento. La probabilità di successo del prodotto è valutata dal barista di $\frac{12}{20} = \frac{60}{100} = 60\%$

L'IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

Tale impostazione è una formalizzazione matematica che utilizza la logica formale e la teoria degli insiemi.
Tutti i possibili esiti di un esperimento vengono detti eventi elementari costituiscono l'insieme U, detto spazio campionario.
Tutti i possibili eventi che si possono associare all'esperimento costituiscono l'insieme delle parti di U detto spazio degli eventi.

Esempio
a) Nel lancio di una moneta lo spazio campione U risulta formato dai due eventi:
   T = "esce testa", C = "esce croce"
b) Nel gettare una moneta due volte lo spazio campione è formato da quattro eventi che possiamo indicare brevemente TT, TC, CT, CC .
c) Dopo aver mescolato un mazzo di 40 carte le distribuisco coperte tra 4 giocatori.
   In questo caso l'evento elementare è ogni insieme di 10 carte scelte da un mazzo di 40 e lo spazio campionario è l'insieme di tutti gli eventi.
d) Accendo una lampadina e la lascio accesa fino a che si brucia cronometrando il suo tempo di vita. In questo caso l'evento elementare è ogni numero reale positivo.

In questi esempi è chiaro che lo spazio campionario può essere discreto se i suoi elementi sono un numero finito (esempi a, b, c), continuo se, ad esempio, consiste in tutti i numeri reali di un certo intervallo (esempio d).

Considereremo spazi campione discreti.

Essendo gli eventi visti come insiemi possiamo effettuare le usuali operazioni insiemistiche.
La seguente tabella presenta la corrispondenza tra operazioni logiche sugli eventi e operazioni insiemistiche.

Linguaggio degli insiemi	**Linguaggio degli eventi**
U spazio campionario	evento certo
$\varnothing$ insieme vuoto	evento impossibile
Insieme A	si verifica A
Insieme $\overline{A}$ complementare di A	non si verifica A; evento contrario di A
$A \cup B$	si verifica A o B (o entrambi); evento somma
$A \cap B$	si verificano A e B simultaneamente; evento prodotto
A \ B = A meno B, cioè $A \cap \overline{B}$	si verifica A e non si verifica B
$A \cap B = \varnothing$	gli eventi A e B sono incompatibili
$B \subseteq A$	B implica A

<u>Definizione assiomatica di probabilità</u>

La probabilità di un evento E è una funzione p che associa a ogni evento E un numero reale detto p(E) che soddisfa i seguenti assiomi:

1. $p(E) \geq 0$;
2. $p(U)=1$;
3. se $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, allora $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$;

Esempio

Nell'estrazione dei numeri della tombola, sia A = "esce un numero maggiore di 50" e B = "esce un numero dispari minore di 10"; vogliamo calcolare la probabilità dell'evento unione.

$$p(A) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}, \quad p(B) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} .$$

I due eventi sono disgiunti, quindi si ha che $p(A \cup B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

Dalla definizione della probabilità si ottengono le seguenti proprietà:

1. $p(\varnothing)=0$;
2. $0 \leq p(E) \leq 1$;
3. $p(\overline{E})=1-p(E)$; (teorema della probabilità contraria)
4. se $E_1 \subseteq E_2$, allora $p(E_2 - E_1)= p(E_2)-p(E_1)$;
5. se $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, e $E_1 \not\subset E_2$, allora $p(E_2-E_1) = p(E_2)-p(E_1 \cap E_2)$.

LA PROBABILITÀ DELLA SOMMA LOGICA DI EVENTI

La somma logica di due eventi $E_1 \cup E_2$ è l'evento che si verifica quando almeno uno dei due eventi si verifica.
I due eventi sono **incompatibili** se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, sono **compatibili** se $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.
La probabilità dell'evento unione si determina con la seguente formula:

$$\mathbf{p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).}$$

Se gli eventi sono incompatibili $p(E_1 \cap E_2) = 0$ e quindi si ottiene il terzo assioma.

La formula precedente si può generalizzare a più eventi.
Se gli eventi sono tutti incompatibili si ha la formula nota come **teorema della probabilità totale**:

$$\mathbf{p(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \ldots + p(E_n)}$$

oppure in forma più sintetica $p(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} p(E_k)$.

Esempio

Un'urna contiene 15 palline numerate da 1 a 15. Calcoliamo la probabilità che estraendo una pallina essa rechi:

1. un numero dispari o maggiore di 10 — $A = E_1 \cup E_2$
2. un numero minore di 6 o maggiore di 10 — $B = E_3 \cup E_2$
3. un numero minore di 6 o dispari o maggiore di 10 — $C = E_1 \cup E_2 \cup E_3$

Dove :
E_1 = "esce un numero dispari"
E_2 = "esce un numero maggiore di 10"
E_3 = "esce un numero minore di 6"
$E_1 \cap E_2$ = "esce un numero dispari maggiore di 10"
$E_2 \cap E_3$ = "esce un numero maggiore di 10 e minore di 6 " = $\emptyset$

Quindi :
$p(A) = p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \ldots.$
$p(B) = p(E_2 \cup E_3) = p(E_2) + p(E_3) = \ldots.$
$p(C) = p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) = \ldots.$

LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

<u>La probabilità condizionata di un evento E_1 rispetto a un evento E_2, non impossibile, è la probabilità di verificarsi di E_1 nell'ipotesi che sia già verificato E_2 e si indica con $p(E_1 | E_2)$.</u>
Se $p(E_1 | E_2) = p(E_1)$ gli eventi si dicono **stocasticamente indipendenti**. In caso contrario si dicono **stocasticamente dipendenti**; in particolare se $p(E_1|E_2) > p(E_1)$ sono correlati positivamente, altrimenti sono correlati negativamente.
Per il calcolo della probabilità condizionata vale la seguente formula:

$$p(E_1 \mid E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}, \text{ con } p(E_2) \neq 0.$$

Esempio

Un'urna contiene 12 palline numerate da 1 a 12.
Consideriamo l'evento E = "estrazione di pallina con numero divisibile per 3";
sappiamo che p(E) = 4/12 = 1/3.

1. Consideriamo l'evento E_1 = "estrazione di una pallina con un numero maggiore di 7"
   $p(E_1) = 5/12$

   Valutiamo la probabilità di E quando sappiamo che E_1 è verificato: $p(E|E_1)$.
   Abbiamo un'informazione in più. Gli esiti possibili sono solo più 5 e non 12. I casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme $E \cap E_1 = \{9,12\}$. Quindi $P(E|E_1) = 2/5$.
   $P(E \cap E_1) = 2/12$, $P(E|E1) = (2/12)/(5/12) = 2/5$
   Vale la formula. E ed E1 sono <u>correlati positivamente</u> in quanto $P(E|E1)>p(E)$.

2. Consideriamo l'evento E_2 = "estrazione di una pallina con un numero pari":
   $p(E_2) = 6/12 = 1/2$

   Valutiamo la probabilità di E quando sappiamo che E_2 è verificato: $p(E|E_2)$. Abbiamo un'informazione in più. Gli esiti possibili sono solo più 6 e non 12. I casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme $E \cap E_2 = \{6,12\}$. Quindi $P(E|E_2) = 2/6 = 1/3$; in questo caso è uguale alla p(E). E ed E_2 sono <u>stocasticamente indipendenti.</u>

3. Consideriamo l'evento E_3 = "estrazione di una pallina con un numero minore di 8":
   $p(E_3) = 7/12$

   Valutiamo la probabilità di E quando sappiamo che E_3 è verificato: $p(E|E_3)$. Gli esiti possibili sono solo più 7 e non 12. I casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme $E \cap E_3 = \{3,6\}$. Quindi $P(E|E_3) = 2/7$. L'informazione supplementare ha portato a un valore inferiore di probabilità. E ed E_3 sono <u>correlati negativamente</u>.

LA PROBABILITÀ DEL PRODOTTO LOGICO DI EVENTI

Il **prodotto logico** di due eventi $E_1 \cap E_2$, o **evento composto,** è l'evento che si verifica quando si verificano entrambi gli eventi.
Il teorema della probabilità composta dice che :

- se E_1 ed E_2 sono eventi dipendenti: $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1)$.
- se E_1 ed E_2 sono eventi indipendenti: $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$.

Esempio

Si estraggono successivamente due carte da un mazzo di 40.
La probabilità che escano due assi nel caso di:

- non reimmissione della prima carta è : $p = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$
- reimmissione della prima carta è : $p = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$.

IL PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE

Lo schema delle prove ripetute o di **Bernoulli** considera successivi *n* esperimenti indipendenti di un evento E avente probabilità costante *p* di verificarsi ogni volta. L'evento si deve verificare *k* volte e non si deve verificare le *(n-k)* volte rimanenti ognuna con probabilità $q=1-p$.
Il valore della probabilità di ottenere *k* successi su *n* prove è :

$$p_{(n,k)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} .$$

Esempio

Un'urna contiene 4 palline nere, 2 rosse e 9 verdi. La probabilità che, effettuando 7 estrazioni nelle stesse condizioni, la pallina nera si presenti 5 volte è: $p_{(5,7)} = \binom{7}{5}\left(\frac{4}{15}\right)^5\left(\frac{11}{15}\right)^2$.

IL TEOREMA DI BAYES

Un evento E si può scrivere come unione di *n* eventi incompatibili ognuno dei quali è il prodotto di due eventi:

$E = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2) \cup \ldots \cup (E \cap E_n)$,

dove $E_1, E_2, \ldots, E_n$ costituiscono una partizione dello spazio campionario U, cioè sono eventi non impossibili, a due a due incompatibili e la cui unione coincide con U.

Applicando la probabilità dell'evento prodotto logico si ottiene la formula di disintegrazione:

$p(E) = p(E_1)\cdot p(E|E_1) + p(E_2)\cdot p(E|E_2) + \ldots + p(E_n)\cdot p(E|E_n)$.

Il teorema di Bayes permette di calcolare la probabilità che un determinato evento E_i abbia preceduto l'evento E che si è verificato.

La probabilità che l'evento E_i sia stata la premessa al verificarsi dell'evento E è :

$$p(E_i \mid E) = \frac{p(E_i)\cdot p(E \mid E_i)}{p(E)}$$

Quindi:

<u>Dato uno spazio campionario Ω e considerata una sua partizione in n sottoinsiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, che chiameremo **cause**, indicato con B un evento non impossibile che chiameremo **effetto**, allora la probabilità che l' evento B sia stato prodotto dalla causa A_i è:</u>

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)\cdot p(A_i)}{p(B|A_1)\cdot p(A_1) + p(B|A_2)\cdot p(A_2) + \ldots + p(B|A_n)\cdot p(A_n)} \qquad \textbf{(*)}$$

Esempio

Una certa produzione utilizza tre macchine M_1, M_2, M_3. Ognuna di esse ha una certa probabilità di produrre pezzi difettosi, in particolare si è valutato che: $p_1 = 0{,}05;\ p_2 = 0{,}02;\ p_3 = 0{,}07$.

Le tre macchine hanno prodotto in totale 1000 pezzi: M_1 ha prodotto 350 pezzi, M_2 ne ha prodotti 520, M_3 gli altri 130. Calcoliamo la probabilità che, scegliendo un pezzo a caso tra i mille, trovandolo difettoso, questo sia stato prodotto da una delle tre macchine.

Poniamo:

A_1 = "il pezzo è stato prodotto da M_1"
A_2 = "il pezzo è stato prodotto da M_2"
A_3 = "il pezzo è stato prodotto da M_3"
B = "il pezzo è difettoso".

$$p(A_1) = \frac{350}{1000} = 0{,}35 \qquad p(A_2) = \frac{520}{1000} = 0{,}52 \qquad p(A_3) = \frac{130}{1000} = 0{,}13$$

Si sa inoltre che: $p(B|A_1) = 0{,}05;\ p(B|A_2) = 0{,}02;\ p(B|A_3) = 0{,}07$. Inserendo tali dati nella formula di Bayes (*), si ottiene: $p(A_1|B) = 0{,}47;\ p(A_2|B) = 0{,}28;\ p(A_3|B) = 0{,}25$.

Si noti che la somma delle tre probabilità è ovviamente 1.