In ricordo del Prof. D.Luigi Asturaro
Mio indimenticabile Insegnante

S I S T E M I   DI   N U M E R A Z I O N E

Franco Castagnola

I SISTEMI DI NUMERAZIONE

Nell'Aritmetica pratica abbiano visto come si scrive un numero qualsiasi,intero o decimale ,nel sistema di numerazione a base 10 o sistema decimale.

Nella rappresentazione grafica dei numeri è di fondamentale importanza distinguere tra un certo numero, ad esempio il numero naturale "cinque" e il corrispondente simbolo 5 oppure V, usato per rappresentarlo.

Consideriamo il numero romano XXX , ad esso ,tenuto conto che i Romani sottintendevano il segno di addizione ,corrisponde il numero: X+X+X= 30.

Consideriamo ancora le due scritture IX (1) ,XI (2) sappiamo che la (1) rappresenta il numero naturale 9, mentre la (2) rappresenta il numero 11, è noto infatti che ,nel sistema di numerazione adottato dai Romani il segno I se posto innanzi ad altro segno, sottrae una unità, mentre posto dopo ne aggiunge una, al segno che la precede.

Siamo quindi di fronte ad un sistema additivo,sistema che però non è esente da possibilità di ambiguità e quindi di confusione, queste infatti cominciano quando ci si trova innanzi a scritture del tipo XIX, il quale potrebbe essere interpretato come :

X+I+X =21

oppure come X+ (I-X) =19 valore che effettivamente gli viene attribuito,

o anche X+I-X =?

Viene spontaneo pensare che questo tipo di sistema non sia poi tanto comodo.

Una svolta decisiva si è avuta con l'introduzione del concetto di notazione posizionale , usato per la prima volta dai Cinesi, consente di rappresentare qualsiasi numero intero o decimale con i soli segni 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, detti cifre.Ad ognuna di queste cifre possono essere assegnati due valori,uno che dipende esclusivamente dalla ***Forma della cifra,*** *e che pertanto, potremmo chiamare :* ***Valore facciale;*** *uno invece legato alla posizione della cifra nel numero,a partire dalla virgola verso destra o verso sinistra,al quale si dà appunto il nome di* ***Valore posizionale.***

Vediamo alcuni esempi:

(1) *7 sappiamo che rappresenta sette unità (valore facciale);*
(2) *70 =7*10 sta a simboleggiare settanta unità;*
(3) *700 7*100" " " settecento unità;*
(4) *77 = 70+7=7*10+7;*
(5) *777=700+70+7=7*100+7*10+7;*
(6) $7{,}7 = 7+\frac{7}{10}$;
(7) $7{,}77 = 7+\frac{7}{10}+\frac{7}{100}$;

Abbiamo dunque scritto sette numeri usando sempre lo stesso simbolo dal valore facciale equivalente a sette unità, però il valore del numero rappresentato è via via cambiato man mano che variava la posizione della cifra 7.

Cosi' ,casi (1),(2),(3), dal valore di "sette " unità siamo passati a settanta e successivamente a settecento.

Mentre in (4) e (5) da settantasette siamo passati a settecentosettantasette.

Infine in (6) e (7) abbiamo rappresentato 7+sette decimi dell'unità e 7+ settedecimi di unità +settecentesimi di unità.

Nella NOTAZIONE POSIZIONALE ogni cifra dell'ordine superiore vale tante unità dell'ordine immediatamente inferiore quante ne indica la base del sistema di numerazione adottato;nel sistema decimale, ad esempio, ogni cifra dell'ordine superiore ne vale 10 di quelle dell'ordine immediatamente inferiore.

Dunque con la Notazione Posizionale e possedendo una regola per passare da una cifra alla precedente e alla seguente, ogni numero, per quanto grande ,può essere scritto con poche simboli elementari ,il numero dei quali dipende dal sistema di numerazione prescelto.

Il sistema di numerazione decimale, che abbiamo incontrato sin dall'Aritmetica elementare,è stato universalmente adottato per la sua evidente semplicità e praticità,questa scelta, molto probabilmente , è la diretta conseguenza della configurazione fisica dell'Uomo che si è ritrovato 10 dita sia alle mani che ai piedi, e quindi del predominio che hanno avuto le mani stesse, nelle operazioni di calcolo dell'Uomo primitivo, diciamo che a buon diritto le dita possono essere considerate il Primo Calcolatore.

Anche se l'abitudine a contare a gruppi di 10 si è imposta in tutto il mondo, questo non è il solo metodo usato, o possibile;ancora oggi, ad esempio, nelle civiltà contadine vige l'abitudine di contare a gruppi di 12, ancora oggi usiamo contare il tempo di 60 in 60, e misurare gli angoli procedendo di 60 in 60 utilizzado il grado babilonese.

Possiamo cosi' definire un ***SISTEMA DI NUMERAZIONE*** *come un insieme di simboli, detti CIFRE, e di REGOLE per combinarli.*
Abbiamo anche visto che esistono due grandi categorie di sistemi di numerazione:

SISTEMI ADDITIVI *nei quali ad ogni cifra è associato un valore numerico predefinito, e tale quindi che per avere il valore totale del numero occorre addizionare i valori numerici rappresentati dalle singole cifre.*

SISTEMI POSIZIONALI *in essi ogni cifra ha associati due valori,uno che dipende dalla forma della cifra (VALORE FACCIALE), l'altro che dipende dal posto in cui è posizionata la cifra nel numero stesso.*

Ogni sistema posizionale è caratterizzato da una ***base*** *, che stà a indicare il numero di simboli utilizzato per rappresentare tutti i numeri e anche quante unità dell'ordine inferiore occorrono per formare una unità dell'ordine immediatamente superiore.*

Nel sistema decimale , ad esempio,si utilizzano le cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (dieci simboli) , questo significa anche che occorrono dieci unità dell'ordine inferiore per formare una unità dell'ordine superiore.
Abbiamo già detto che il sistema decimale è stato adottato universalmente per la sua grande semplicità e praticità, in pratica esso è utilizzato da circa un millennio.
A un certo momento, per necessità pratiche, quali la criptografia (scrittura decifrabile solo da chi ne possiede la chiave) , nei messagi cifrati, in cui si usa rappresentare le lettere dell'alfabeto con numeri scritti in una base diversa da

dieci, ma soprattutto nella costruzione di macchine calcolatrici, si sentì il bisogno di ricorrere a sistemi di numerazione in una base diversa da 10.

L'aiuto a queste necessità venne dalle Scienze Matematiche che trasformarono i numeri del sistema decimale ,in numeri del sistema a base 2 , detto per questo Sistema Binario; nel quale le sole cifre utilizzate sono appunto due 0-1 o anche in numeri del sistema di numerazione Ottale (a base 8) o ancora in numeri del sistema OCTAL-BINARIO E PER FINIRE NEL SISTEMA Esadecimale in base sedici.

Vediamo ora come, con una notazione posizionale e una regola per passare da una cifra alla precedente e alla successiva ,ogni numero ,per quanto grande , possa essere scritto con pochi simboli elementari, il cui numero dipende ovviamente dal sistema di numerazione scelto.

Conveniamo di indicare con ***b*** *la base del sistema prescelto e con* ***c*** *le cifre del sistema di numerazione stesso.*

Teniamo anche presente che parlando di "NUMERO" sottointenderemo che sia intero ,ovvero che in esso compaiano, una o due, o tre ……. cifre subunitarie perché è a questi casi che ci si riferisce nella pratica dei calcoli.

Ogni numero N, appartenente ad un sistema di numerazione in base b puo' essere rappresentato mediante la notazione posizionale nel seguente modo.

$$N_b = c_{n-1}b^{n-1} + c_{n-2}b^{n-2} + ...c_2b^2 + c_1b^1 + c_\circ b^\circ + c_{-1}b^{-1} + c_{-2}b^{-2} + ...+.c_{-m}b^{-m}..$$

Questa rappresentazione, che per essere in forma di polinomio, viene appunto chiamata
rappresentazione polinomiale del numero , nella pratica dei calcoli si rivela troppo scomoda e pertanto viene sostituita con un allineamento del tipo:

$$N_b = c_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}..............c_3c_2c_1c_\circ, c_{-1}c_{-2}c_{-3}........c_{-m}$$

che puo' essere anche scritto :

$$\sum_{i=n-1}^{i=-m} c_i b^i = N_b$$

essendo

$$0 \le c_i \le b$$

n è il numero delle cifre intere di N e m è il numero delle cifre subunitarie.

Vediamo ora di applicare quanto visto al sistema di numerazione ***Binario o base 2***
In questo sistema i simboli utilizzati per rappresentare qualsiasi numero possono essere soltanto due e precisamente le cifre 0 e 1,(in un circuito elettrico infatti, le possibilità che si presentano, sono soltanto due, il circuito è chiuso oppure è aperto, di conseguenza la corrente o passa"1" oppure non passa"0").

Passaggio dal sistema binario a quello decimale

Dagli esempi visti nei capitoli precedenti si è chiaramente visto che per passare da un sistema di numerazione ad un altro,occorre scrivere il primo numero nella forma polinomiale e quindi eseguire le operazioni indicate.

Vediamo di procedere, con alcuni esempi, passando da un numero espresso in base due al valore dell'equivalente espresso in base 10.

Sia dato il numero

$$N_2 = 110101$$

Come già detto conviene scriverlo separando le cifre a gruppi di tre.

N= 110 101

Passiamo ora alla forma polinomiale:

$$N_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 32 + 16 + 0 + 4 + 1 = 53_{10}$$

Vediamo ora un esempio che contenga cifre dimidiali, allo scopo consideriamo il numero

$$N_2 = 101{,}011100$$

= 101, 011 100

$$N_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0, 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} + 0\cdot 2^{-5} + 0\cdot 2^{-6}$$

$$= 4 + 0 + 1, \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6}$$

= 5+0,4375 =5,4375 base 10.

$$= 5{,}0 + 0 + 0.25 + 0{,}125 + 0{,}0625 + 0 + 0$$

Puo' essere di un certo interesse vedere se esiste la possibilità di redere piu' spedito il passaggio sistema binario, sistema decimale,allo scopo consideriamo un qualsiasi numero binario, e scriviamolo nella forma polinomiale.

Sia dato , ad es.,

$$N_2 = c_7 2^7 + c_6 2^6 + c_5 2^5 + c_4 2^4 + c_3 2^3 + c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0 2^0 + c_{-1} 2^{-1} + c_{-2} 2^{-2} + c_{-3} 2^{-3} + c_{-4} 2^{-4}$$

Associamo ora i termini del polinomio, a tre a tre, a partire dal termine contenente

$$2^0$$

sia verso sinistra che verso destra, troviamo:

$$N_2 = (0 2^8 + c_7 2^7 + c_6 2^6 \quad) + \left(c_5 2^5 + c_4 2^4 + c_3 2^3\right) + \left(c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0 2^0\right) + \left(\frac{c_{-1}}{2} + \frac{c_{-2}}{2^2} + \frac{c_{-3}}{2^3}\right) + \left(\frac{c_{-4}}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2}\right.$$

ora raccogliamo dalla prima terna

$$2^6 = 8^2$$

dalla seconda

$$2^3 = 8^1$$

dalla terza

$$2^0 = 8^0 = 1$$

e via di seguito

Effettuando questi raccoglimenti si ottiene:

$$= \left(02^2 + c_7 2^1 + c_6 2^0\right)8^2 + \left(c_5 2^2 + c_4 2^1 + c_3 2^0\right)8^1 + \left(c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0 2^0\right)8^0 + \left(c_{-1} 2^2 + c_{-2} 2^1 + c_{-3} 2^0\right)8^1 + \left(c_{-4} 2^2 + 0 \cdot 2\right.$$

Si vede così che ogni numero binario suddiviso in terne è uguale a un numero del sistema ottale ordinato secondo le potenze decrescenti di 8; i coefficienti di tali potenze sono i VALORI FACCIALI delle terne che costituiscono il numero binerio considerato,essendo il valore facciale di una terna il numero del sistema decimale eguale al numero binario rappresentato dalla terna considerata.

Tali valori sono dati dalla seguente tabella:

N.ro Binario	**Valore Facciale**
000	**0**
001	**1**
010	**2**
011	**3**
100	**4**
101	**5**
110	**6**
111	**7**

Numeri che puo' essere utile ricordare a memoria

$8^0 = 1$

$8^1 = 8$

$8^2 = 64$

$8^3 = 512$

$8^4 = 4096$

$8^5 = 32768$

$8^6 = 262144$

$8^7 = 2097152$

Esercizio *Trasformare in numero decimale il seguente numero binario*

$$N_2 = 110101{,}011100$$

Suddividiamolo anzi tutto in terne *" = 110 101,011 100*

Il numero in base 8 uguale al suddetto in base due è:

$$N_2 = 6 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 + \frac{3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0}{8^2} = 48 + 5 + \frac{24 + 4}{64} = (53{,}4375)_{10}$$

Come si vede si puo' passare facilmente dalla forma binaria a quella decimale attraverso la forma ottale.

Passaggio dal sistema decimale al binario

I Caso Il ***numeroN del quale si vuole trovare il trasformato ,nel sistema binario è intero.***

1° Modo utilizzando il metodo delle successive divisioni per 2:

Supponiamo ad esempio che il numero dato , in base 10 , sia eguale al numero in base due dato da:

$$N_{10} = N_2 = c_6 2^6 + c_5 2^5 + c_4 2^{\ 4} + c_3 2^{\ 3} + c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0 2^0 [1]$$

essendo

$$c_{0,} c_1, c_2 \ldots$$

rispettivamente la prima.la seconda, la terza…….cifra binaria del numero binario cercato. Per calcolare tali cifre e procedendo da destra osserviamo che:

$$N_{10} = 2\left(c_6 2^5 + c_5 2^4 + \ldots\ldots\ldots + c_1 2^0\right) + c_0 con 0 \le c_0 \le 2$$

Si vede cosi' che la cifra

$$c_0$$

È il resto della divisione di

$$\frac{N_{10}}{2}$$

Mentre il quoziente è

$$q_1 = c_6 2^5 + c_5 2^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots c_1$$

Ripetiamo per q1 l'operazione fatta su N10 e troviamo:

$$q_1 = 2\left(c_6 2^4 + c_5 2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_2\right) + c_1 \qquad 0 <= c_1 < 2$$

Si vede così che la seconda cifra binaria di N10 è b1 resto della divisione di q1 per 2, e

Così via sino a trovare il quoziente zero.

Come applicazione pratica vediamo di trovare il numero N base 2 eguale a

$$N_{10} = 9171$$

MOLTIPLICAZIONE *è evidente che anche per i numeri del sistema binario si ha:*

$$0 \cdot 0 = 0; 0 \cdot 1 = 0; 1 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1; N_2 \cdot 1 = N_2 .$$

come si puo' ben vedere dalla seguente tabella:

*	0	1
0	0	0
1	0	1

In analogia a quanto visto per i numeri in base 10,risulta evidente che:

" Per moltiplicare (dividere) un numero binario per i numeri binari 10, 100, 1000,…………(equivalenti ai numeri

$2^1, 2\ \ , 2\ \ , \ldots..$

del sistema decimale) è sufficiente trasportare la virgola di tanti posti verso destra (sinistra) quanti ne indica il numero degli zeri del moltiplicatore (ossia l'esponente della potenza di 2), introducendo opportunamente degli zeri , se necessario.

*Cosi' ad es. 1001 * 10 =10010*
*111 011 * 100 =11 101 100*
*110 * 1000 = 0110 000*
*111 *10000 = 111 0000*

REGOLA :1) i due numeri binari sono interi.

Si moltiplica ciascuna cifra di uno di essi (conviene, in pratica,quello che contiene il minor numero di cifre 1) preso come moltoplicatore , per ciascuna cifra dell'altro (moltiplicando),mettendo nei prodotti parziali ,in colonna le cifre dello stesso ordine, e addizionando in fine i prodotti parziali ottenuti.

```
Esempio   1 011*
            110
        ---------
          10 110
         101  1
        ---------
       1000  0 1 0
```

2) i due numeri binari contengono cifre dimidiali

Si procede come nel caso 1) astraendo dalla virgola,separando poi,nel risultato,con la virgola,a partire da destra,tante cifre quante sono complessivamente le cifre dimidiali dei due numeri binari dati

.

```
Esempio        10,11  *
               11,01
              --------
               1011
              1011
             1011
           ----------
   1000,1 111   =  10000, 111 100
```

Il prodotto di due numeri binari interi puo' anche essere calcolato passando per il sistema ottale,basta calcolare i due numeri, del sistema ottale, ad essi equivalenti, servendosi della tabella di pag.5, ad ogni terna del numero bineri sostiuiamo il suo valore facciale,procedendo poi al solito modo.
Si vogliano, ad esempio moltiplicare i due numeri:

$$(110111101)_2$$
$$(111011)_2$$

Conviene suddividerli in terne

*110 111 101 =(6 7 5)(base 8)**
111 011 =(73)(base 8)

24 67
60 5 3

(6 3 2 1 7)base8

*3*5=1 5;* 15 | 8 ; 7 | 1 — *si scriva il resto 7 e si riporti 1;*

*3*7+1=22;* 22 | 8 ; 6 | 2 — *si scriva il resto 6 e si riporti 2;*

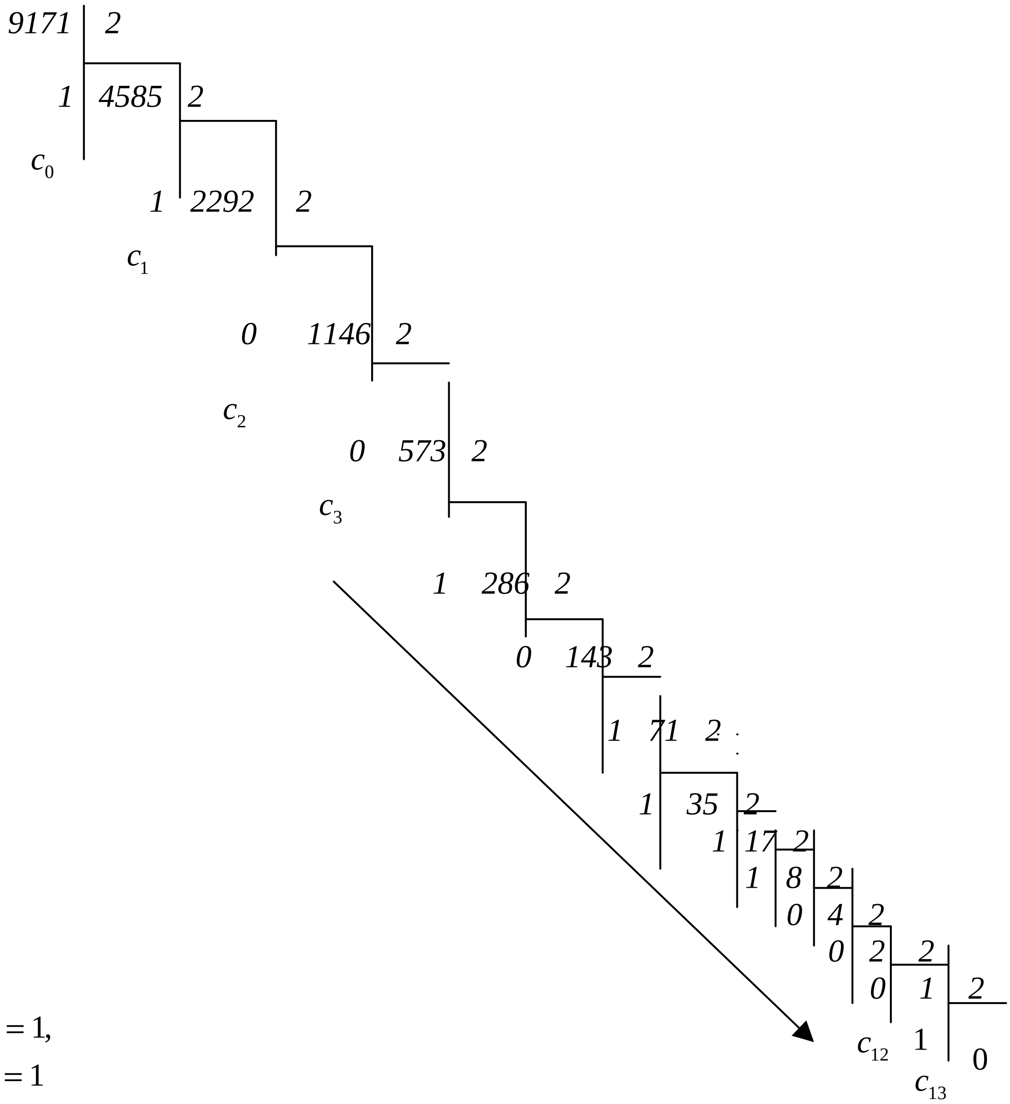
*3*6+2 =20 ;* 20 | 8 ; 4 | 2 — *si scriva il resto 4 e si riporti 2.*

In modo analogo si opera con la seconda cifra del moltiplicatore

*7*5=35;* 35 | 8 ; 3 | 4 — *si scriva il resto 3 sotto la seconda cifra 6 del primo prodotto parziale e si riporti 4;*

*7*7+4=53 ;* 53 | 8 ; 5 | 6 — *si scriva il resto5 sotto la terza cifra del primo prodotto parziale e così via.*

Il prodotto cercato è pertanto : (110 011 010 011 111)base 2.



$c_0 = 1,$
$c_1 = 1$
$c_2 = 0$
$c_3 = 0$
$c_4 = 1$
…
…
…
$c_{12} = 0$
$c_{13} = 1$

Si vede quindi che

$$N_{10} = 9171$$

È uguale a

$$N_2 = 10001111010011$$

II MODO L’operazione diventa piu’ semplice espedita, procedendo nel seguente modo:

Per prima cosa si trova ,nel sistema octal, il numero N (base 8) = N(base10)=9171, mediante le successive divisioni per 8; i resti così trovati altro non sono che i valori facciali delle terne che sono i coefficienti di

$8^0, 8^1, 8^2, 8^3, \ldots\ldots$

valori che sappiamo scrivere nella forma binaria mediante la tabella di pagina 5.

Si ha successivamente:

9171	8				
3	1146	8			
	2	143	8		
		7	17	8	
			1	2	8
				2	0

Quindi

$$N_{10} = 9171 = N_8 = 2\cdot 8^4 + 1\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = N_2 = (010001111010011)_2$$

Il numero

N_8

Si puo’ anche rappresentare con l’allineamento :

$N_8 = (21723)_8$

II CASO

Il numero , base 10 ,considerato è decimale finito con parte intera nulla.

Si potrebbe usare il metodo delle successive moltiplicazioni per 2, però è sicuramente piu’ spedito il metodo delle successive moltiplicazioni per 8 .

Supponiamo ,per esempio, di dover trasformare nel sistema binario il

$$N_{10} = (0{,}4375)_{10}$$

Vediamo se è possibile determinare i ***valori facciali***

$t_{-1}, t_{-2}, t_{-3} \ldots\ldots\ldots$

In modo che si abbia:

$t_{-1} \cdot 8^{-1} + t_{-2} \cdot 8^{-2} + t_{-3} \cdot 8^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}4375.$

moltiplicando i due membri per 8 si trova:

$t_{-1} + t_{-2} \cdot 8^{-1} + t_{-3} \cdot 8^{-2} + \ldots\ldots\ldots \quad = 3 + 0{,}5000$

deve essere

$t_{-1} = 3$

da cui ,ricordando la tabella posta a pag 5

$$t_{-1} = (011)_2$$

inoltre,deve essere

$$t_{-2} 8^{-1} + t_{-3} 8^{-2} + \ldots\ldots = 0{,}5000;$$

moltiplicando ancora i due membri per 8 si trova

$$t_{-2} + t_{-3} 8^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 4 + 0{,}000;$$

deve essere

$t_{-2} = 4$

e quindi

$$t_{-2} = (100)_2$$

e

$t_{-3} 8^{-1} \ldots\ldots\ldots = 0{,}0000$

In definitiva

$$N_{10} = 0{,}4376 = N_2 = (0.011100)_2$$

III CASO

Il numero dato in base 10 è costituito da una parte intera e da una decimale

Conviene prima trasformare la sola parte intera,mediante il metodo delle successive divisioni per 8,e successivamente la parte decimale con il metodo delle successive moltiplicazioni per 8.

Ad esempio si debba trsformare in base 2 il numero ,base 10, N=9171,4375.
Trasformiamo prima 9171con il metodo visto in precedenza,e successivamente trasformiamo 0,4375 mediante le successive moltiplicazioni per 8.Potremmo disporre i calcoli nel seguente modo:

0,4375x	*0,5000x*
8	*8*
3,5000=3+0,5000	*4,0000 =4+0,0000;*

allora

$$N_{10} = (010001111010011{,}011100)_2$$

che conviene scrivere (010 001 111 010 011, 011 100)

LE QUATTRO OPERAZIONI ELEMENTARI NEL SISTEMA BINARIO

ADDIZIONE *Per calcolare la somma di piu' numeri binari occorre,per prima cosa, disporli in modo che risultino in colonna le virgole, le cifre intere e dimidiali dello stesso ordine;successivamente si addizionano le unità dello stesso ordine tenendo presente che **per ogni coppia di unità di una stessa colonna si ha una unità della colonna posta immediatamente a sinistra.***

Puo' essere utile, a questo scopo, una tabella del seguente tipo:

+	0	**1**
0	0	**1**
1	**1**	**1**0

*da essa risulta chiaramente che : 0+0=0;0+1=1;1+0=1;**1+1 =10** ossia 1+1 dà ZERO unità dell'ordine inferiore e UNA unità dell'ordine immediatamente superiore,in poche parole,scrivo 0 e riporto 1.*

Vediamo ora di chiarire meglio , tutto quanto detto, servendoci di qualche esempio.

011 100 010 111 +
100 110 011 101 +
101 010 001 110 =

linea dei quozienti (riporti) *1101 101 222 11*

linea dei resti *1101 101 000 010*

procedendo da destra verso sinistra addizioniamo le cifre della prima colonna e dividiamo la somma parziale trovata per 2;il resto di questa divisione è la prima cifra della somma binaria cercata; il quoziente si riporta,(scrivendolo per comodità in fondo alla seconda colonna)ADDIZIONANDOLO con le cifre della seconda colonna; la nuova somma parziale trovata si divide per 2 ;il resto di questa divisione è la seconda cifra della somma binaria cercata; il quoziente si riporta come sopra ecc.ecc.

*Puo' essere piu' comodo eseguire la somma fra piu' numeri binari,passando per i corrispondenti numeri del sistema ottale, eseguire la somma dei nuovi numeri e scrivendo,alla fine, il risultato nel sistema binario.Nell'eseguire la somma nel sistema ottale, occorre sempre tenere presente che: **"nei riporti ,ogni otto unità di un dato ordine si ottiene una unità dell'ordine immediatamente superiore".***

Rivediamo,da questo punto di vista,l'esempio precedente:

Numeri in base 2		*equivalenti base otto*
(011 100 010 111)	=	*(3 4 2 7) +*
(100 110 011 101)	=	*(4 6 3 5) +*
(101 010 001 110)	=	*(5 2 1 6) =*
		1 1 2
		(1 5 5 0 2) base 8.

Addizionando le cifre della prima colonna a destra si trova 7+5+6=18, si divide 18 per 8 ,sitrova 2 (1°quoziente intero) e 2 come resto;questo resto rappresenta la prima cifra (a destra) della somma ottale cercata;il quoziente 2 si riporta addizionandolo con le cifre della seconda colonna;si trova così 2+(2+3+1)=8;si divide 8 per 8,si trova 1 come quoziente e 0 come resto;questo 0 rappresenta la seconda cifra della somma cercata;1+(4+6+2)=13, che diviso per 8 dà come quoziente 1 e come resto5.

A questo punto si passa dalla somma

$S_2 = S_8$

Al numero

$_8 = (15502\ _8$

Sostituendo alle cifre del sistema ottale il loro valore nel sistema binario forniti dalla tabella di pag5, si trova così:

$$S_2 = (001101101000010)_2$$

SOTTRAZIONE:

si debba calcolare la differenza fra due numeri appartenenti al sistema binario

$a_2 - b_2 con a > b$

è facile ricondurlo al caso precedente in quanto

$$a_2 - b_2 = -(b_2 - a_2).$$

Si possono utilizzare tre metodi:

*1°) dopo aver incolonnati i due numeri,in base due,a,b con a > b, da ciascuna cifra del minuendo si sottrae la cifra corrispondente (quella che occupa lo stesso posto a partire da destra) del sottraendo,tenedo ben presente che "**per sottrarre la cifra 1 dalla cifra 0,si diminuisce di 1 la cifra del minuendo immediatamente a sinistra dello zero considerato in esso,e si aumenta di 2, lo zero stesso". Metodo diretto.*** *Vediamo qualche esempio:*

Es.1)	*1 101 -*	*controllo*	*(1 101)in binario = 13 base10*
	101 =		*(101)" " = 5 " "*
	1 000		*(1 101)-(101) = 8 base 10*

Es 2)

1 1 121 112 linea dei "prestiti"
10 010 ,000 100 -
1 011,001 100 =

00 110,111 000

Le regole della sottrazione,al pari di quelle dell'addizione, possono comunque essere sintetizzate mediante una tabella del tipo:

-	0	1	*minuendo*
0	0	1	*sottraendo*
1	1	0	*con prestito di 1*

2°) Puo' essere piu' pratico procedere passando per il sistema ottale , allo scopo,rivediamo il secondo esempio

*(010 010,000 100)base 2 = (2 2 0 4) base 8 – ******
(001 011,001 100) " " = (1 3 1 4) " 8 =

(0 6 7 0) " 8 = (110,111 000) base 2

*****si diminuisce di uno il 2 e si aumenta di otto lo 0.*

3) *Sicuramente è il metodo piu' semplice,viene chiamato "Metodo del complemento a 1"*
Consiste nel trasformare la sottrazione in addizione, addizionando al minuendo il complemento a 1 del sottraendo, scartando infine l'ultima cifra a sinistra del risultato.

Dato un certo numero in base 2 si ottiene il complemento a 1 nel seguente modo:
1) *si inverte ogni cifra del numero dato,trasformando gli 1 in 0 e viceversa;*
2) *a questo risultato si addiziona 1.*

Es:dato il numero binario 011 101
100 010 ora si addiziona 1
1

100 101 si ottiene così il complemento a 1 del numero dato.

Vediamo ora di eseguire alcune sottrazioni,prima con il metodo diretto e poi con il

complemento a 1.

METODO DIRETTO ***METODO DEL COMPLEMENTO***

101 -
011 ← *calcoliamo il complemento 100 + eseguiamo ora la addizione 101 +*
1 = 101 =
010 101
cifra da scartare → *(1)010*

pertanto il risultato della sottrazione (101)-(011) è 010 coincidente in entrambi i metodi.

Vediamo ora di eseguire ,con il solo metodo del complemento, una sottrazione un poco piu' complessa,in modo da evidenziare i vantaggi del 3° metodo:

Supponiamo di voler eseguire (111 101 – 011 100) base2, disponiamo i calcoli cosi'
1)invertiamo le cifre del minuendo 100 011
2)addizioniamo 1 ottenendo 100 100 ← *complemento a 1 cercato*
3) possiamo ora eseguire l'operazione principale 111 101 +
100 100 =
cifra da scartare → *1)100 001 risultato =100 001.*

MOLTIPLICAZIONE *è evidente che anche per i numeri del sistema binario si ha:*

$$0 \cdot 0 = 0; 0 \cdot 1 = 0; 1 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1; N_2 \cdot 1 = N_2 .$$

come si puo' ben vedere dalla seguente tabella:

*	0	1
0	0	0
1	0	1

In analogia a quanto visto per i numeri in base 10,risulta evidente che:

" Per moltiplicare (dividere) un numero binario per i numeri binari 10, 100, 1000,…………(equivalenti ai numeri

2^1,2 ,2 ,…..

del sistema decimale) è sufficiente trasportare la virgola di tanti posti verso destra (sinistra) quanti ne indica il numero degli zeri del moltiplicatore (ossia l'esponente della potenza di 2), introducendo opportunamente degli zeri , se necessario.

*Cosi' ad es. 1001 * 10 =10010*
*111 011 * 100 =11 101 100*
*110 * 1000 = 0110 000*
*111 *10000 = 111 0000*

REGOLA :1) i due numeri binari sono interi.

Si moltiplica ciascuna cifra di uno di essi (conviene, in pratica,quello che contiene il minor numero di cifre 1) preso come moltoplicatore , per ciascuna cifra dell'altro (moltiplicando),mettendo nei prodotti parziali ,in colonna le cifre dello stesso ordine, e addizionando in fine i prodotti parziali ottenuti.

```
Esempio   1 011*
            110
        ---------
         10 110
        101  1
       ----------
       1000  0 1 0
```

2) i due numeri binari contengono cifre dimidiali

Si procede come nel caso 1) astraendo dalla virgola,separando poi,nel risultato,con la virgola,a partire da destra,tante cifre quante sono complessivamente le cifre dimidiali dei due numeri binari dati

.

```
Esempio        10,11  *
               11,01
              -------
               1011
              1011
             1011
          -----------
        1000,1 111   =  10000, 111 100
```

Il prodotto di due numeri binari interi puo' anche essere calcolato passando per il sistema ottale,basta calcolare i due numeri, del sistema ottale, ad essi equivalenti, servendosi della tabella di pag.5, ad ogni terna del numero bineri sostiuiamo il suo valore facciale,procedendo poi al solito modo.
Si vogliano, ad esempio moltiplicare i due numeri:

$$(110111101)_2$$
$$(111011)_2$$

Conviene suddividerli in terne

*110 111 101 =(6 7 5)(base 8)**
111 011 =(73)(base 8)

24 67
60 5 3

(6 3 2 1 7)base8

*3*5=1 5; 15 | 8* — *si scriva il resto 7 e si riporti 1;*
7 | 1

*3*7+1=22; 22 | 8* — *si scriva il resto 6 e si riporti 2;*
6 | 2

*3*6+2 =20 ; 20 | 8* — *si scriva il resto 4 e si riporti 2.*
4 | 2

In modo analogo si opera con la seconda cifra del moltiplicatore

*7*5=35; 35 | 8 si scriva il resto 3 sotto la seconda cifra 6 del primo prodotto parziale e*
3 | 4 si riporti 4;

*7*7+4=53 ; 53 | 8 si scriva il resto5 sotto la terza cifra del primo prodotto parziale*
5 | 6 e così via.

Il prodotto cercato è pertanto : (110 011 010 011 111)base 2.

Divisione di due numeri binari

Per dividere due numeri del sistema binario si opera in maniera analoga a quella vista per il sistema decimale.
Nel sistema binario la divisione risulta molto piu' semplice ; si riduce ad eseguire soltanto delle sottrazioni , con le cifre del quoziente che possono essere soltanto 0 0ppure 1.

Distinguiamo tre casi:

I) I due numeri binari sono entrambi interi:

Es.a)

```
10010 | 110          quoto q= (011)base2
 110  | 011          resto r = 0.
  110 |
  110 |
    0 |
```

Es b)

```
11011 | 101
      |              quoziente q
      |                         (101)_2
101   | 101
  111 |
 101  |
  10  |              resto r
                          (10)_2
```

```
1 010  000  111  110  111 | 10  011  001
1 001  100  1             |
                          | 100 001 111
     100  011  110        |
      10  011  011        |
      10  000  101 1      |
       1    001  100  1   |      q= 100 001 111
                          |        r= 0
           111  001  01   |
           100  110  01   |
            10  011  001  |
            10  011  001  |
                        0
```

II CASO *I numeri binari da dividere non sono entrambi interi.*

Siano h,k il numero delle cifre dimidiali,rispettivamente del dividendo e del divisore , si moltiplichino i due numeri per il numero formato da 1 seguito da tanti zeri quanti ne indica il non minore fra i due numeri h,k; si calcoli poi il quoziente intero e il resto della divisione dei due numeri interi trovati;il quoziente è quello cercato, il resto diviso per lo stesso numero per cui si sono moltiplicati i due numeri dati,è il resto cercato.

Esempio *si debba eseguire la divisione:*

$$(11000{,}11)_2 : (1{,}1)_2$$

Si ha		
	110 0011	*110*
	0 0011	*10000*

$$q = (10000)_2$$

$$r = \frac{11}{100} = (0{,}11)_2$$

III CASO *In maniera simile a quanto si fa nel sistema a base 10,si puo' calcolare il quoziente approssimato, di due numeri binari ,per difetto a meno di una unità dimidiale del primo, oppure del secondo, o del terzo……………ordine.*

L'operazione estrazione di radice quadrata

L'operazione della estrazione di radice quadrata intera da un numero interoN consiste nella determinazione del ***massimo intero N il cui quadrato non supera il numeroN stesso.***

Riferendoci ai numeri binari risulta evidente che:

$$\sqrt[10]{0} = 0; \sqrt[10]{1} = 1; \sqrt[10]{100} = \sqrt[10]{10^{10}} = 10;$$

$$\sqrt[10]{10000} = \sqrt[10]{(100)^{10}} = 100..........$$

*E'anche ovvio che se un numero intero binario,di cui si cerca la radice quadrataintera,termina con una,oppure due o tre…..**coppie di zeri**, si calcola la radice quadrata intera del numero che si ottiene trascurando gli zeri,scrivendo poi alla destra del risultato trovato rispettivamente uno,oppure due,oppure tre…..zeri.*

Ad esempio

$$\sqrt[10]{N_2 \cdot 100} = \sqrt[10]{N_2 (10)^{10}} = 10\sqrt[10]{N_2};$$

$$\sqrt[10]{N_2 \cdot 10000} = \sqrt[2]{N_2 (100)^{10}} = 100\sqrt[10]{N_2};$$

Apriamo ora una parentesi per ricordare che nel sistema decimale la determinazione di n si puo' effettuare tenendo presente l'identità:

$$1+3+5+7+.............(2n-1)=n^2;$$

in cui n é un numero naturale qualsiasi,mentre nel primo membro dell'identità compare la somma dei primi n numeri dispari della serie naturale dei numeri.
Dato un numero intero qualsiasi N(base 10) , se da esso si sottraggono successivamente e ordinatamente i numeri dispari 1,3,5,7……………... fino a che la sottrazione è possibile con i numeri assoluti, il numero n delle sottrazioni fatte rappresenta il ***massimo intero il cui quadrato non supera il numero decimale dato.***
Una macchina calcolatrice capace di effettuare l'operazione sottrazione, puo' ,di conseguenza anche eseguirel'operazione estrazione di radice.

Evidentemente quando si debba operare con numeri elevati il metodo non risulta essere pratico, vediamo allora di applicare ai numeri in base due, un algoritmo suggerito dall'Aritmetica per i numeri in base 10.
Questo algoritmo puo0 essere schematizzato nei seguenti passi:

1°) *si suddivida il numero binario N in coppie di due cifre a partire da destra;il primo gruppo a sinstra può anche essere di una sola cifra.*

2°) *La prima cifra della radice è 1, se ne faccia il quadrato e lo si sottragga dal primo gruppo, a sinistra, del radicando.*

3°) *Accanto al primo resto parziale si scirva la seconda coppia di N (nel nostro esempio 11); si ottiene il primo radicando parziale.*

4°) *Da questo si sottragga il numero che si ottiene scrivendo alla destra della parte della radice gia' trovata il numero 01; se la sottrazione è possibile (nel calcolo lo indicheremo con un sì) si scriva 1 come seconda cifra della radice e accanto al nuovo resto parziale si scriva la terza coppia di N. Se invece la sottrazione non è possibile(indicheremo con un no) ,si scriva come seconda cifra della radice uno 0 e si trascriva accanto al resto la quarta coppia di N;*

5°) *Dal nuovo radicando parziale si sottragga il numero che si ottiene scrivendo alla destra della parte della radice già trovata, il solito numero o1, e così via.*

Se il numero binarioN ha cifre dimidiali si opera come per l'estrazione della radice quadrata da un numero decimale con parte decimale.

√ 1 11 11 10 10 01	10 11 01
1	101 no
0 11 11	1001 sì
10 01	
11 0 10	10101 sì
10 1 0 1	
1 0 1 10 01	101001 no
10 1 10 01	1011001 sì
0	

Appendice

Sistemi di numerazione in base diversa

da 2 e 10

Notizie generali:

Abbiamo già visto che ,per necessità eminentemente pratiche, il primo sistema di numerazione adottato dall'uomo è stato quello in base 10.
L'insieme delle cifre di questo sistema è costituito da (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)mentre il codice per un numero intero puoi' essere sintetizzato mediante una tabella del Tipo:

posizione	… 6	5	4	3	2	1	0
denominazione	milione	cent. di migliaia	Decine di migliaia	migliaia	centin.	Dec.	unità
valore posizionale	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^°

Ciò che è importante osservare è che ogni unità in ciascuna colonna vale 10 volte quella immediatamente a destra.

Considerando ora un qualsiasi numero nella base 10, ad esempio (3 2 4 6 5)

$$5\cdot 10^0 = 5+$$
$$6\cdot 10^1 = 60+$$
$$4\cdot 10^2 = 400+$$
$$2\cdot 10^3 = 2000+$$
$$3\cdot 10^4 = 30000$$
$$totale = 32465\,unità$$
$$-$$

Che nella forma polinomiale puo' essere scritto nel seguente modo:

$$(32465)_{b:10} = 3\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0;$$

Se ora vogliamo analizzare un numero frazionario occorre tenere presente che , le cifre poste alla destra della virgola,hanno un valore posizionale che è legato a potenze negative della base 10 e quindi ogniuna di tali cifre deve essere intesa come moltiplicata per una potenza di 10 a esponente negativo, a partire da

$$10^{-1}$$

ad esempio
0,652 =

$$6\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3}$$

Facciamo ora l'ipotesi che una civiltà primitiva abbia preso come riferimento le dita di una sola mano,il suo sistema di numerazione si sarebbe, pertanto, sviluppato nella base 5;i simboli (cifre) da utilizzare sarebbero quindi (0,1,2,3,4).

Da quanto detto prima risulta chiaro,che in questo sistema,per avere una unità dell'ordine superiore ne occorrono cinque dell'ordine immediatamente inferiore.
E' facile capire che in questa base un certo numero, es.324 ha un significato ben diverso da quello che lo stesso 324 ha se riferito ad un sistema in base 10,in realtà 324 in base 5 rappresenta 3 cinquine di cinquine,due cinquine e quattro unità.
Scritto nella forma plinomiale esso si presenta:

$$(324)_5 = 3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 4\cdot 5^0 = (89)_{10}$$

Confrontiamo questa forma polinomiale con quella dello stesso numero 324 però in base dieci:

$$(324)_{10} = 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$$

Vediamo ancora un esempio pero' in un'altra base ancora ad es. 3,i simboli(cifre) da utilizzare, questa volta sono soltanto(0 1,2).Supponiamo allora

di volere il valore decimale del numero (2101) in base tre;ponendolo nella forma polinomiale si ha:

$$(2101)_3 = 2\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0$$

ossia " *= 2*27+1*9+0+1=64 base dieci.*

Due basi molto usate,oltre la 10 e 2, sono la base otto e la base sedici,vediamole Iniziando dalla base otto.

Le cifre da utilizzare in questa base sono ovviamente (0,1,2……….7) e come ormai è ben noto,in questa base, otto unità di un certo ordine concorrono a formare una unità dell'ordine immediatamente superiore.
Considerando allora il numero 52430 base otto,si ha:

$$52430_8 = 5\cdot 8^4 + 2\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 + 3\cdot 8^1 + 0\cdot 8^0$$

Appare evidente che quando si devono definire sistemi di numerazione la cui base,come ad es. il 16,contiene un numero di cifre superiore alle 10, tutte le cifre superiori al 9 vengono rappresentate con le lettere maiuscole dell'alfabeto.
Nel sistema in base 16, detto anche esadecimale,si utilizzano le prime 9 cifre
e per rappresentare i numeri 10, 11, 12, 13, 14 , 15
si utilizzano rispettivamente le lettere A, B, C, D, F , E
così un numero un numero in base sedici
quale ad es. A3B74C nella forma polinomiale viene rappresentato
nel seguente modo:

$$A3B74C_{16} = A\cdot 16^5 + 3\cdot 16^4 + B\cdot 16^3 + 7\cdot 16^2 + 4\cdot 16^1 + C\cdot 16^0$$

ossia:

$$A3B74C_{16} = 11\cdot 16^5 + 3\cdot 16^4 + 12\cdot 16^3 + 7\cdot 16^2 + 4\cdot 16^1 + 13\cdot 1$$

Abbiamo visto che nel sistema decimale le cifre utilizzate sono un insieme costituito dalle prime dieci cifre del sistema decimale e dalle sei prime lettere dell'alfabeto ,è evidente che il valore posizionale di tali cifre è in funzione delle potenze di 16,vediamo come questo legame possa essere, piu' chiaramente espresso, mediante una tabella:

posiz cifra ………..	3	2	1	0	-1
val.pos. …………	16^3	16^2	16^1	16^0	16^-1

Appare evidente che se si sposta una cifra di una posizione verso destra il suo valore viene diviso per 16;viceversa se si sposta una cifra verso sinistra il suo valore viene moltiplicato per 16, come appare anche chiaramente dall' esempio della pagina precedente.
Vediamo ora come sia possibile effettuare la conversione dal sistema base 16 a quello base 10.
Ci seviamo di qualche esempio:
1) il numero esadecimale contiene solo una parte intera:

$$5BD7 = 5\cdot 16^3 + 11\cdot 16^2 + 13\cdot 16^1 + 7\cdot 16^0 = 5\cdot 4096 + 11\cdot 256 + 13\cdot 16 + 7\cdot 1 =$$
$$= 2048 + 2816 + 208 + 7 = 23511;$$

2) il numero contiene anche cifre decimali:

$$2AB.2EC = 2\cdot 16^2 + 10\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0 + 2\cdot 16^{-1} + 15\cdot 16^{-2} + 12\cdot 16^{-3} =$$
$$"""""""""""= 2*256 + 160 + 11*1 + \frac{2}{16} + \frac{15}{256} + \frac{12}{4096} + =$$
$$"""""""""""= 512 + 160 + 11 + 0.125 + 0.0586 + 0.002930$$
= 683,18653 base 10.

Anche per la conversione decimale- esadecimale ci serviamo di un semplice esempio:
Dato il numero decimale (46925) calcolare il corrispondente numero esadecimale.
Il principio è ancora quello di eseguire le successive divisioni per 16 e prendere poi vari resti in ordine inverso, come già visto per la conversione decimale –binario, e decimale – ottale:

46925 | 16
13 | 2932 | 16
4 | 183 | 16
7 | 11 | 16
11 | 0

D
B

dunque:

$$(46925)_{10} = (B74D)_{16}$$

Se il numero decimale è decimale o contiene una parte decimale ci si comporta come già visto con il sistema binario,e ottale.

Traformare il numero (0,878) base dieci nell'equivalente in base 16.

Procediamo nel seguente modo:

*0,878 * 16 = 14,048 = E+0,48;*
0,048 * 16 = 0,768 = 0 +0,768;
0,768 * 16 = 12,288 = C +0.288;
0,288 * 16 = 4,608 = 4 + 0,608

Pertanto

$$(0{,}878)_{10} = (E0C4)_{16}$$

Infatti

$$(E0C4)_{16} = \frac{E}{16^1} + \frac{0}{16^2} + \frac{C}{16^3} + \frac{4}{16^4}$$

Ossia

$$= \frac{14}{16} + 0 + \frac{12}{4096} + \frac{4}{65536}$$

Ossia *= 0,875+0,00293+0,00006104 =0,87799 =0,878*

Ovviamente il procedimento ha termine quando la parte decimale si è annullata oppure sia stata raggiunta la precisione desiderata.
Come già visto per il passaggio binario –decimale servendosi del sistema ottale,esiste un metodo veloce per effettuare il passaggio binario-esadecimale e naturalmente il contrario.

Si suddivida il numero binario dato (supposto intero) in gruppi di 4 cifre ovviamente procedendo da destra verso sinistra.Se è presente una parte decimale l'operazione avviene da sinistra verso destra,a partire dal termine contenente 2^°,analogamente con quanto fatto con il sistema ottale,si puo' dimostrare che ogni numero binario suddiviso in gruppi di 4 cifre,è uguale ad uno del sistema esadecimae, ordinato secondo le potenze decrescenti di 16.
I coefficienti di queste potenze sono i valori facciali delle quaterne che costituiscono il numero binario considerato,essendo il valore facciale di una quaterna, il numero decimale uguale al numero rappresentato dalla quaterna considerata.

Se i gruppi estremi non contengono 4 cifre possono essere copletati ponendo degli 0 al posto delle cifre mancanti.

A ciascun gruppo di 4 cifre si associa il corrispondente simbolo esadecimale.

Trasformare il numero binario 1010101100111101 nell'equivalente esadecimale, e in decimale

1010	*1011*	*0011*	*1101*	
A	*B*	*3*	*D*	*conversione in esadecimale*
10	*11*	*3*	*13*	*conversione in decimale*

Pertanto

$$(1010101100111101)_2 = (AB3D)_{16} = (1011313)_{10}$$

Per rendere piu' agevole questo tipo di operazione è certamente utile disporre di una tabella del tipo di quella presentata a pagina5.

Corrispondenza fra

Numero Decimale	*Numero Esadecimale*	*Quaterne binarie*
0	*0*	*0000*
1	*1*	*0001*
2	*2*	*0010*
3	*3*	*0011*
4	*4*	*0100*
5	*5*	*0101*
6	*6*	*0110*
7	*7*	*0111*
8	*8*	*1000*
9	*9*	*1001*
10	*A*	*1010*
11	*B*	*1011*
12	*C*	*1100*
13	*D*	*1101*
14	*E*	*1110*
15	*F*	*1111*

L'ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA DI UN NUMERO BINARIO

L'estrazione della radice cubica intera da un numero intero N in base due, consiste nel determinare il massimo intero binario il cui cubo non supera il numero dato.
Risulta chiaro che (in cifre binarie) :

$$\sqrt[11]{0}=0;\sqrt[11]{1}=1;\sqrt[11]{1000}=\sqrt[11]{10^{11}}=10;\sqrt[11]{1000000}=\sqrt[11]{(100)^{11}}=100;$$

è altrsì chiaro che se un numero intero binario terminba con ***una,****ovvero* ***due,*** *ovvero* ***tre…… terne di zeri*** *, si puo' calcolare la radice cubica intera del numero ottenuto trascurando tutte le terne di zeri , scrivendo poi a destra del risultato trovato rispettivamente* ***uno,*** *ovvero* ***due,*** *ovvero* ***tre zeri. In altre parole , scrivendo a destra del risultato uno zero per ogni terna di zeri presente nel numero dato.***

Ad esempio:

$$\sqrt[11]{N_2\cdot 1000}=\sqrt[11]{N_2(10)^{11}}=10\sqrt[11]{N_2};$$
$$\sqrt[11]{N_2 1000000}=\sqrt[11]{N_2(100)^{11}}=100\sqrt[11]{N_2}$$

L'0perazione estrazione di radice cubica, tanto nel sistema decimale che in quello binario, si basa sul metodo chiamato dei ***SESTUPLI QUADRATI*** *basato a sua volta su formule aritmetiche di cui diamo un cenno.*
Consideriamo l'espressione

$$n^3-n,$$

con n numero intero qualsiasi >1, esiste l'identità

$$n^3-n=(n-1)n(n+1)(1)$$

I caso n pari . Consideriamo le identità numeriche seguenti:

$$2^3-2=6(1)^{2;}\qquad 4^3-4=6(1^2+3^{2);}\qquad 6^3-6=6(1^2+3^2+5^2);\qquad 8^3-8=6(1^2+3^2+5^2+7^2)$$

e così via; generalizzando, per n intero assoluto pari qualsiasi , esiste l'dentità :

$$n^3-n=6\left[1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)^2\right](2)$$

Sempre nel caso di n pari possiamo esprimere

$$n^3-n$$

In funzione di quadrati di numeri pari; infatti la (2) si puo' scrivere:

$$n^3-n=6\left\{1+(2+1)^2+(4+1)^2+(6+1)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left[(n-2)+1\right]^2\right\}=$$

$$=6\left\{1+2^2+4+1+4^2+8+1+6^2+12+1+\ldots\ldots.+(n-2)^2+2(n-2)+1\right\}=$$

$$=6\left\{2^2+4^2+6^2+\ldots\ldots\ldots+(n-2)^2+\left[4+8+12+\ldots.+2(n-2)+\frac{n}{2}\right]\right\}=$$

$$=6\left[2^2+4^2+6^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-2)^2+4\left(1+2+3\ldots\ldots+\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n}{2}\right];$$

da cui:

$$n^3 - n = 6\left[2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n-2)^2 + \frac{(n-1)n}{2}\right](3)$$

II CASO n dispari . In maniera analoga si possono trovare le formule:

$$n^3 - n = 6\left[2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots\ldots + (n-1)^2\right](4)$$

$$n^3 - n = 6\left[1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-2)^2 + \frac{(n-1)n}{2}\right](5)$$

Regola pratica per l'estrazione della radice cubica di un numero binario

Sia N un numero binario intero dato , se termina con una o piu' terne di zeri, abbiamo già visto come dobbiamo comportarci. Premesso ciò:

1° Si scomponga N in terne di cifre(naturalmente da destra a sinistra),il primo gruppo a sinistra puo' avere tre,due,o una sola cifra.
La prima cifra della radice è1;le due successive possono essere 1 oppure 0. Questa prima cifra della radice si sottragga dal primo gruppo a sinistra e accanto al resto trovato si scriva la seconda terna di n; si ha così il primo radicando parziale R1.(Vedere l'esempio successivo).

2° Si provi se la seconda cifra della radice è 1 ovvero o; a tale scopo si calcoli ***il sestuplo***

$$\left(6_{10} = 110_2\right)$$

della metà del prodotto dei due numeri binari che si ottengono dalla parte già calcolata della radice scrivendo alla sua destra prima 0 poi1 e si guardi se tale sestuplo (espresso in cifre binarie) si puo' sottrarre dal primo radicando parziale R1.

La sottrazione è possibile *allora si scriva 1 come seconda cifra della radice ;dal risultato della sottrazione si tolga l'ultima cifra scritta in radice. Accanto al resto trovato si scriva la terza terna di N e si provi se la terza cifra della radice è 1 ovvero 0, calcolando il sestuplo nel modo visto sopra.*

La sottrazione non è possibile , 0 (zero) *è la seconda cifra della radice cercata, si abbassi la terna successiva di N e si provi se la terza cifra della radice è 1 oppure 0 (zero) , nel modo indicato sopra ,e così via.*

ESEMPIO si calcoli la radice cubica del numero binario N = 10 010 000 101 000.

Comiciamo con osservare che il numero in questione termina con una terna di zeri, pertanto eseguiamo l'operazione come se essa non ci fosse ricordandoci però di aggiungere uno 0 al risultato finale.

L'operazione puo' essere così disposta:

$\sqrt[11]{\;}$ 10 010 000 101 101	10101
1	1° sestuplo 110*(10*11)/10 =100.1.11=10010;no.
1 010 000	
111 100	
10 100	
1	2° sestuplo 100*(100*1011)/10= 11010101=111 100 si.
10 011 101 101	
10 011 101 100	3° sestuplo 110*(1010*1011)10=110 101 1011=
	= 101 001 010 no.
1	
1	
	4° sestuplo 110*(10100*10101)/10=110 1010 10101=
0	
	= 10 011 101 100 si.

In definitiva, e ricordando che il numero dato terminava con una terna di 0, il risultato è:

$$\sqrt[11]{10010000101101000} = 101010$$

Qualora l'operazione estrazione di rqdice cubica non portasse ad un rsto zero,cosa che ovviamente accade quando l'intero N binario, non è il cubo di alcun N binario intero, si possono calcolare una o piu' cifre dimidiali della radice, scrivendo accanto al radicando tante terne di zeri quante sono le cifre dimidiali che si desiderano e operando poi decondo le regole date.
Se il radicando ha cifre dimidiali, si opera in modo che il numero di queste cifre sia multiplo di tre,scrivendo alla destra del numero dato tanti zeri quanti ne occorrono allo scopo.