Sistemi di numerazione e codici

Generalità

- Sistema di numerazione
  - Insieme di simboli (cifre) e regole
  - stringa di cifre ↔ valore numerico
  - codici posizionali (il valore dipende dalla posizione delle cifre)

In base 10 (la piu' comune)

$$A_n A_{n-1} A_{n-2} \ldots\ldots A_0 \Longrightarrow N = A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + A_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots\ldots + A_0 \cdot 10^0$$

Ad esempio

$$1923 \Longrightarrow 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

  - Si possono pero' adottate altre basi con B≠10
    (le piu' comuni: B=2, B=8, B=16)
    si adottano B cifre diverse
    (Ad.es B=16 : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F)

Sistema di numerazione su base qualsiasi

- La base 2 e' la piu' piu' piccola possibile (ON/OFF) - Binary Digit
- Le basi 8 e 16 permettono rappresentazioni piu' compatte del numero binario
  - Il passaggio da base 2 a base 8 o16 e viceversa e` particolarmente facile

$$55_{10} = 110111_2$$

$$110111_2 = 47_{16} = 67_8$$

Conversione tra basi diverse

- Divisione successiva per la Base
  - si divide ripetutamente il numero per la base voluta fino ad ottenere un quoziente nullo e si memorizzano i resti (la seq. dei resti ordinata rappresenta la notazione)
- Per quanto detto il passaggio da basi B a B^n e viceversa risulta particolarmente semplice

Es: $$157_{10} = 10011101_2 = 235_8 = 9D_{16}$$

Conversione di frazioni

- La parte frazionale viene distinta dalla parte intera mediante una "virgola" : ","

  Ad esempio

  $$1923{,}45 \Rightarrow 1\cdot10^{3} + 9\cdot10^{2} + 2\cdot10^{1} + 3\cdot10^{0} + 4\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2}$$

  parte intera parte frazionale

- La virgola distingue le cifre che vanno moltiplicate per B con esponente positivo da quelle con esponente negativo
- La conversione avviene in tal caso per moltiplicazioni successive

$$0{,}375_{10} = 0{,}011_{2}$$

Conversione di frazioni

- NOTA BENE
  - Se con una base una notazione frazionaria richiede un numero finito di cifre, potrebbe richiederne infinite con una diversa notazione

$$(1/3)_{10} = 0{,}333333\ldots_{10} = 0{,}1_{3}$$

$$0{,}6375_{10} = 0{,}101\overline{0001}_{2}$$

- Conversione da binario a decimale
  - Parte intera: raddoppio successivo + somma a partire dalla cifra piu' significativa
  - Parte frazionaria: idem + successiva divisione per 2^{f} ove f sono i bit rappresentativi della parte frazionale

$$101.010_{2} = (5 + 2/8)_{10} = 5{,}25_{10}$$

Aritmetica Binaria

- Addizione

  0+0=0
  0+1=1
  1+0=1
  1+1=0 (+ riporto di 1 al rango superiore)

- Sottrazione

  0-0=0
  1-0=1
  1-1=0
  0-1=1 (+ riporto negativo di 1 al rango superiore)

  - La sottrazione puo' pero' avvenire tramite la somma usando una notazione complementata

Complemento decimale

- ES:

  $$123-73=123+comp(73)=123+927=1050-50$$

  - In questo caso si usa un complemento a 10^3=1000 ovvero comp(73)=1000-73 che e' facile da calcolare basta adottare la corrispondenza

$0 \rightarrow 9$	$9 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 7$	$7 \rightarrow 2$
$3 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 3$
$4 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 4$

e poi sommare 1

$$073 \rightarrow 926+1=927$$

Complementi a B e B+1

- Analogamente in altre Basi (ad esempio base 2)

  Si definiscono:

  $C_B = B^n - N$ e $C_{B-1} = B^n - N - 1$

  Da cui si desume che:

  $C_B = C_{B-1} + 1$

Attenzione : il (Complemento a B) – 1 non e' uguale al Complemento a (B-1)

  - Il complemento a B-1 e' semplice da calcolare
    - basta una tabella di equivalenza (come prima)

    $C_{B-1} = B^n - 1 - N = B'B'B'B'B'B'B'B' - N$ ove $B' = B-1$

  - Il complemento a B si ottiene dal precedente sommandovi 1

$$\mathbf{N_1 - N_2} \rightarrow \mathbf{N_1 + C_B(N_2) = N_1 + (B^n - N_2) = B^n + (N_1 - N_2)}$$

Numeri negativi

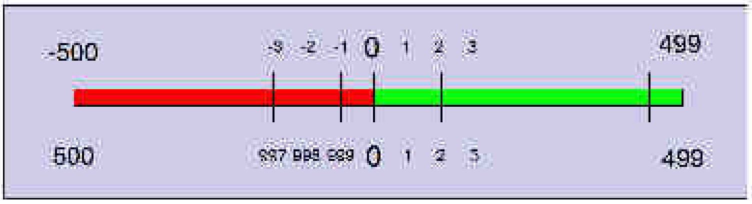
- Dalla differenza di N_1 ed N_2 vi possono essere due casi:
  - $N_1 \geq N_2$: il risultato risulta maggiore o uguale a B^n, che pertanto va eliminato dal risultato finale (eliminazione dell'1 piu' significativo oltre il range del numero stesso)
  - $N_1 < N_2$: il risultato risulta minore di B^n, e deve essere inteso come complemento a B (pertano rappresentante di un numero negativo) del risultato

Numeri negativi

- I numeri negativi possono pertanto essere rappresentati in base al loro complemento a B

  $-143 \rightarrow C_{10}(143) = 999 - 143 + 1 = 856+1 = 857$

- Si può notare che il range dei numeri risulta modificato:
  - $0 < n < 499$: range dei numeri positivi
  - $500 < n < 999$: range dei numeri negativi



- Ovviamente in base 10 questa non è una pratica usuale

Numeri binari negativi

- Risulta invece estremamente diffusa nel caso di numeri binari ove i numeri negativi vengono rappresentati in base al loro complemento a 2

  Es:

  $$-9 = -01001 = C_2(01001) = 10110 + 1 = 10111$$

1	0	1	1	1

Bit di segno: $\begin{cases} 0\text{: numero positivo} \\ 1\text{: numero negativo} \end{cases}$

Numero positivo: i restanti numeri rappresentano il numero stesso
Numero negativo: i restanti numeri rappresentano il numero complementato

$$C_2(0111) = 1000 + 1 = 1001 = 9_2$$

Errori nei risultati

- Il risultato di un'operazione somma/sottrazione e coerente solo se il risultato non esce dal range dei numeri rappresentabili
  - Ovvero
    - o non si e' avuto alcun riporto ne' nel bit di segno ne' fuori dalla parola
    - o si sono avuti riporti in entrambi
    - se si e avuto un solo riporto il risultato e' errato

$0011 \rightarrow 3+$	$0011 \rightarrow 3-$	$1011 \rightarrow -5+$	$1111 \rightarrow -1-$
$\underline{0010 \rightarrow 2=}$	$\underline{0110 \rightarrow 6=}$	$\underline{1010 \rightarrow -6=}$	$\underline{1110 \rightarrow -2=}$
$0101 \rightarrow 5$	$1001 \rightarrow -7$	$10101 \rightarrow 5$	$11101 \rightarrow -3$
nessun riporto	riporto sul segno	riporto fuori dalla parola	riporto sia sul segno che fuori dalla parola

: cifre "out of range" e pertanto non vengono calcolate

: bit di segno

Moltiplicazione e Divisione

- Moltiplicazione binaria

  0*0=0

  0*1=0

  1*0=0

  1*1=1

  nel caso di piu' cifre si procede come nel caso decimale

- Divisione
  - vengono di solito eseguite per sottrazioni successive