

Rappresentazione numeri in virgola mobile

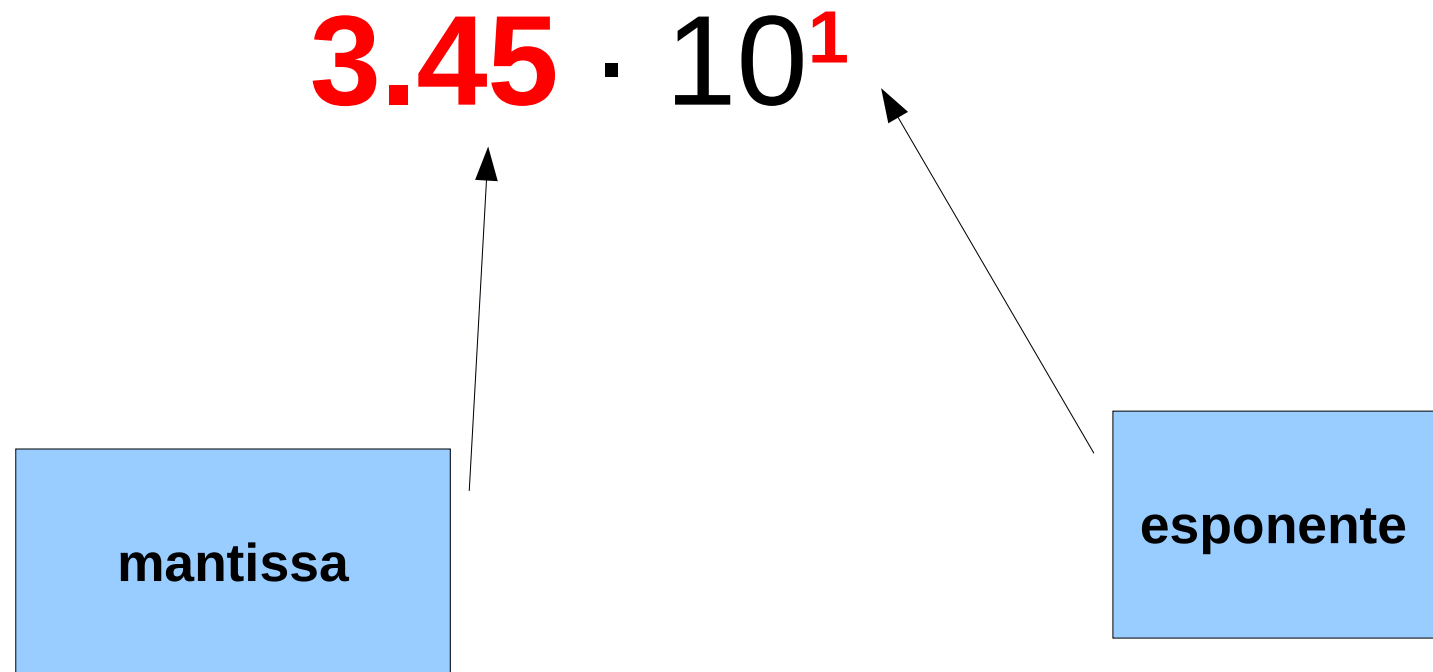
- Un numero non intero può essere rappresentato in infiniti modi quando utilizziamo la notazione esponenziale:
 - Es.
 $34.5 = 0.345 \cdot 10^2 = 0.0345 \cdot 10^3 = 345 \cdot 10^{-1}$
- Questo formato prende il nome di **floating-point** (virgola mobile)
- Essendo infinite le rappresentazioni è necessario sceglierne una di riferimento (rappresentazione **normalizzata**)

Rappresentazione numeri in virgola mobile

- Nei numeri decimali possiamo ad es. considerare come normalizzata la rappresentazione in cui la parte intera è formata da una sola cifra;
 - es. $3.45 \cdot 10^1$
- Possiamo quindi distinguere in numero
 - le cifre significative (significando o mantissa)
 - l'esponente da dare alla base

Rappresentazione numeri in virgola mobile

- Nel nostro esempio:



Rappresentazione numeri in virgola mobile

- In generale un numero rappresentato in f.p. assume la forma:

$$d_0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\dots d_{-(p-1)} \cdot b^e$$

il cui significato è

$$(d_0 + d_{-1}b^{-1} + d_{-2}b^{-2} + d_{-3}b^{-3} + \dots d_{-(p-1)}b^{-(p-1)}) \cdot b^e$$

- **p** è la precisione della rappresentazione
- Nel caso della base 2 possiamo rappresentare soltanto le cifre dopo la virgola risparmiando un bit

Rappresentazione numeri in virgola mobile

- Un numero binario rappresentato in f.p. assume la forma normalizzata:

$$1.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\dots d_{-(p-1)} \cdot 2^e$$

- si rappresenteranno esplicitamente:
 - i bit dopo la virgola;
 - l'esponente;
 - il segno del numero.

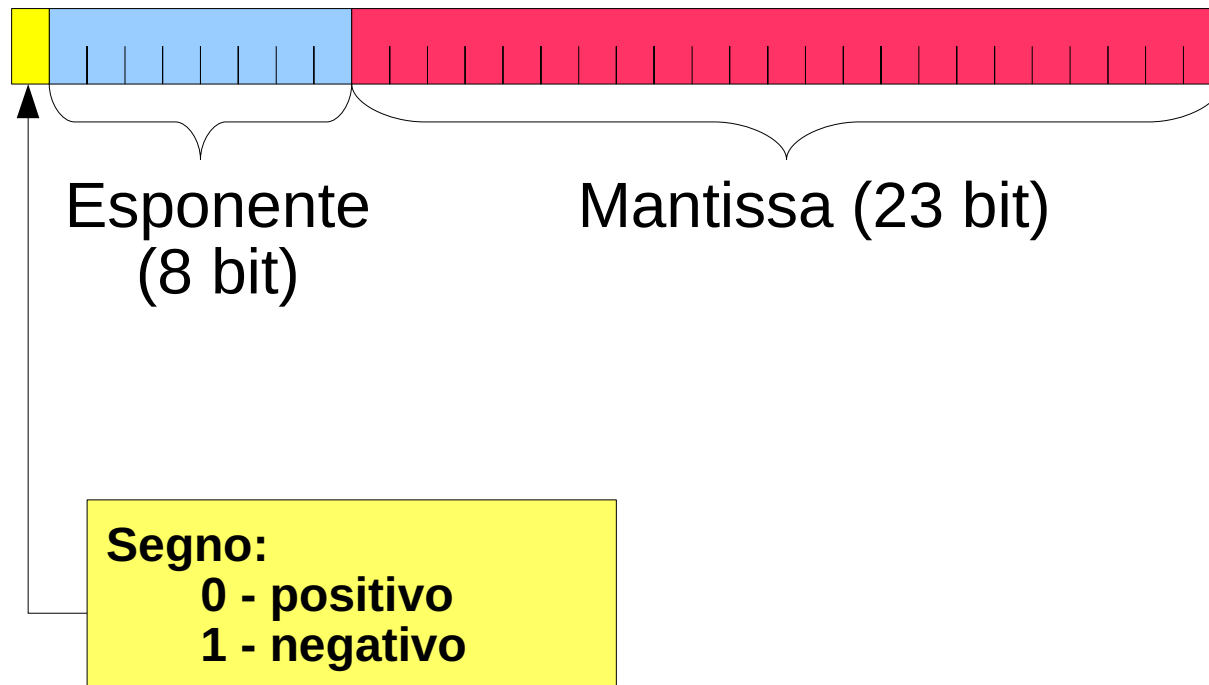
Rappresentazione numeri in virgola mobile

- Si può facilmente osservare che in tale rappresentazione:
 - i numeri non sono equispaziati fra di loro (il peso del LSB della mantissa dipende dall'esponente)
 - la finitezza della rappresentazione introduce la possibilità sia di **overflow** (valore assoluto troppo grande) che di **underflow** (valore assoluto troppo piccolo)

Standard IEEE-754

- E' lo standard internazionale adottato per rappresentare i numeri reali
- Prevede la rappresentazione di
 - numeri in f.p. **normalizzati**
 - alcuni numeri **denormalizzati**
 - **infinito** (positivo e negativo)
 - **NaN** (not a number) per rappresentare risultati indeterminati delle operazioni (come 0/0 ecc.)

Standard IEEE-754



Standard IEEE-754

0 10000100 000101000000000000000000

$$\text{Es. } 34.5_{10} = 100010.1_2 = 1.000101_2 \cdot 2^5 = 1.000101_2 \cdot 10_2^{101}$$

Segno: 0 (positivo)

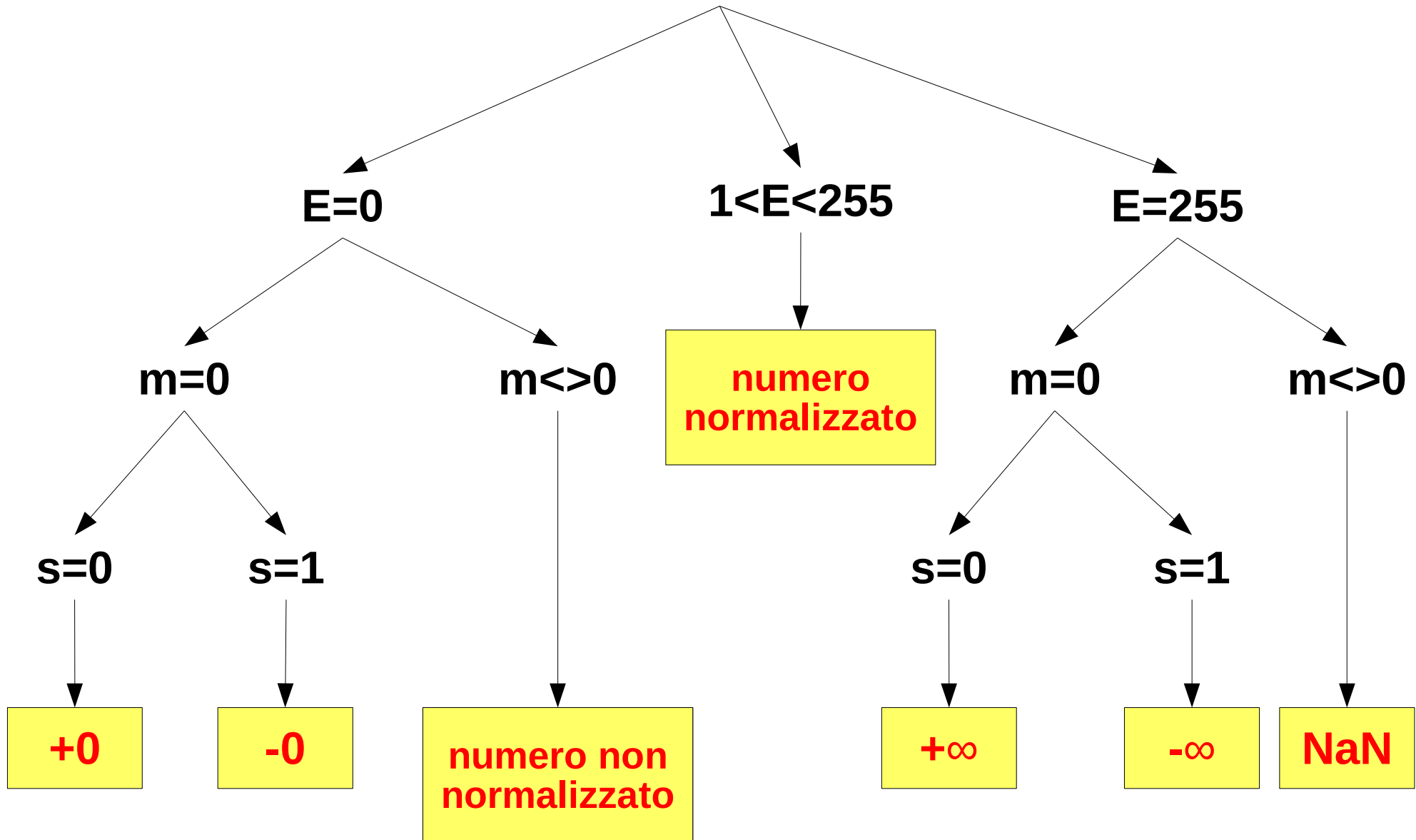
Mantissa: 000101 (la parte intera pari a 1 si sottintende)

Esponente: $5+127 = 132 = 10000100_2$
(rappresentazione in **eccesso 127**)

Standard IEEE-754

- Non tutti i valori possibili di E e m sono utilizzati
- Se **E=0** il numero può essere nullo o non normalizzato
- Se **E=255** (tutti 1) si rappresenta un **infinito** (positivo o negativo) o un **non numero** (NaN)
- Negli altri casi (**$0 < E < 255$**) si rappresenta un numero **normalizzato**
- I numeri **non normalizzati** si utilizzano per riempire lo spazio tra lo 0 e il più piccolo numero normalizzato

Standard IEEE-754



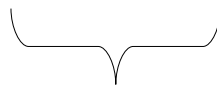
Standard IEEE-754

- La rappresentazione dell'esponente in eccesso 127 (**biased**) consente una maggior facilità di progettazione dei circuiti della ALU: il confronto avviene, **a parte il segno**, confrontando semplicemente il resto del numero **lessicograficamente**.

– es: il primo numero è più piccolo del secondo

• $12.34E-03 = 0\ 01111000\ 10010100010110110110110$

• $32.87E-02 = 0\ 01111101\ 01010000100101101011110$



=

Primo bit diverso

Esercizi

- Convertire in formato IEEE754:
 - 2.34
 - 51.27
 - 0.0023
- Convertire in decimale:
 - AB98 2000
 - FFA0 4110
 - 0023 A5B8

Esercizi

- Determinare il più grande (piccolo) numero positivo (negativo) rappresentabile in IEEE754
 - con 1 bit di segno, 8 di esponente e 23 di mantissa (singola precisione)
 - con 1 bit di segno, 11 di esponente e 52 di mantissa (doppia precisione)
- Elencare i numeri rappresentabili con:
 - 1 bit di segno, 3 di esponente e 4 di mantissa

Esercizi

Fattore di scala:
 - per E=0 si usa lo stesso di E=1;
 - per E=111 non viene considerato;
 - negli altri casi vale $2^{(E-3)}$

S	E	M	E	M	fdS	Significando	N=M*fdS		Significando $\Delta = \text{fdS} / 2^4$
0	000	0000	0	0	0,2500	0,0000	0,000000	0	
0	000	0001	0	1	0,2500	0,0625	0,015625	Denormalizzato	M/2 ⁴ 0,015625
0	000	0010	0	2	0,2500	0,1250	0,031250		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	0011	0	3	0,2500	0,1875	0,046875		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	0100	0	4	0,2500	0,2500	0,062500		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	0101	0	5	0,2500	0,3125	0,078125		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	0110	0	6	0,2500	0,3750	0,093750		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	0111	0	7	0,2500	0,4375	0,109375		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1000	0	8	0,2500	0,5000	0,125000		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1001	0	9	0,2500	0,5625	0,140625		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1010	0	10	0,2500	0,6250	0,156250		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1011	0	11	0,2500	0,6875	0,171875		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1100	0	12	0,2500	0,7500	0,187500		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1101	0	13	0,2500	0,8125	0,203125		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1110	0	14	0,2500	0,8750	0,218750		M/2 ⁴ 0,015625
0	000	1111	0	15	0,2500	0,9375	0,234375		M/2 ⁴ 0,015625
0	001	0000	1	0	0,2500	1,0000	0,250000	Normalizzato	1+M/2 ⁴ 0,015625
0	001	0001	1	1	0,2500	1,0625	0,265625	Normalizzato	1+M/2 ⁴ 0,015625
0	001	0010	1	2	0,2500	1,1250	0,281250	Normalizzato	1+M/2 ⁴ 0,015625
0	001	0011	1	3	0,2500	1,1875	0,296875	Normalizzato	1+M/2 ⁴ 0,015625
0	001	0100	1	4	0,2500	1,2500	0,312500	Normalizzato	1+M/2 ⁴ 0,015625
0	001	0101	1	5	0,2500	1,3125	0,328125	Normalizzato	1+M/2 ⁴ 0,015625

Esercizi

S	E	M	E	M	fdS	Significando	N=M*fdS		Significando	$\Delta = \text{fdS} / 2^4$
0	001	0110	1	6	0,2500	1,3750	0,343750	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	0111	1	7	0,2500	1,4375	0,359375	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1000	1	8	0,2500	1,5000	0,375000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1001	1	9	0,2500	1,5625	0,390625	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1010	1	10	0,2500	1,6250	0,406250	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1011	1	11	0,2500	1,6875	0,421875	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1100	1	12	0,2500	1,7500	0,437500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1101	1	13	0,2500	1,8125	0,453125	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1110	1	14	0,2500	1,8750	0,468750	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	001	1111	1	15	0,2500	1,9375	0,484375	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	010	0000	2	0	0,5000	1,0000	0,500000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,015625
0	010	0001	2	1	0,5000	1,0625	0,531250	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	0010	2	2	0,5000	1,1250	0,562500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	0011	2	3	0,5000	1,1875	0,593750	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	0100	2	4	0,5000	1,2500	0,625000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	0101	2	5	0,5000	1,3125	0,656250	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	0110	2	6	0,5000	1,3750	0,687500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	0111	2	7	0,5000	1,4375	0,718750	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	1000	2	8	0,5000	1,5000	0,750000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	1001	2	9	0,5000	1,5625	0,781250	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	1010	2	10	0,5000	1,6250	0,812500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	1011	2	11	0,5000	1,6875	0,843750	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	1100	2	12	0,5000	1,7500	0,875000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250

Esercizi

S	E	M	E	M	fdS	Significando	N=M*fdS		Significando	$\Delta = \text{fdS} / 2^4$
0	010	1101	2	13	0,5000	1,8125	0,906250	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	1110	2	14	0,5000	1,8750	0,937500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	010	1111	2	15	0,5000	1,9375	0,968750	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	011	0000	3	0	1,0000	1,0000	1,000000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,031250
0	011	0001	3	1	1,0000	1,0625	1,062500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	0010	3	2	1,0000	1,1250	1,125000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	0011	3	3	1,0000	1,1875	1,187500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	0100	3	4	1,0000	1,2500	1,250000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	0101	3	5	1,0000	1,3125	1,312500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	0110	3	6	1,0000	1,3750	1,375000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	0111	3	7	1,0000	1,4375	1,437500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1000	3	8	1,0000	1,5000	1,500000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1001	3	9	1,0000	1,5625	1,562500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1010	3	10	1,0000	1,6250	1,625000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1011	3	11	1,0000	1,6875	1,687500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1100	3	12	1,0000	1,7500	1,750000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1101	3	13	1,0000	1,8125	1,812500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1110	3	14	1,0000	1,8750	1,875000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	011	1111	3	15	1,0000	1,9375	1,937500	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	100	0000	4	0	2,0000	1,0000	2,000000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,062500
0	100	0001	4	1	2,0000	1,0625	2,125000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,125000
0	100	0010	4	2	2,0000	1,1250	2,250000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,125000
0	100	0011	4	3	2,0000	1,1875	2,375000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,125000

Esercizi

S	E	M	E	M	fdS	Significando	N=M*fdS		Significando	$\Delta = \text{fdS} / 2^4$
0	110	1001	6	9	8,0000	1,5625	12,500000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,500000
0	110	1010	6	10	8,0000	1,6250	13,000000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,500000
0	110	1011	6	11	8,0000	1,6875	13,500000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,500000
0	110	1100	6	12	8,0000	1,7500	14,000000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,500000
0	110	1101	6	13	8,0000	1,8125	14,500000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,500000
0	110	1110	6	14	8,0000	1,8750	15,000000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,500000
0	110	1111	6	15	8,0000	1,9375	15,500000	Normalizzato	$1 + M/2^4$	0,500000
0	111	0000	7	0				+Infinito		
0	111	0001	7	1				NaN		
0	111	0010	7	2				NaN		
0	111	0011	7	3				NaN		
0	111	0100	7	4				NaN		
0	111	0101	7	5				NaN		
0	111	0110	7	6				NaN		
0	111	0111	7	7				NaN		
0	111	1000	7	8				NaN		
0	111	1001	7	9				NaN		
0	111	1010	7	10				NaN		
0	111	1011	7	11				NaN		
0	111	1100	7	12				NaN		
0	111	1101	7	13				NaN		
0	111	1110	7	14				NaN		
0	111	1111	7	15				NaN		