L’insieme dei numeri Relativi (Z)

L’esigenza dei numeri relativi

Due precise situazioni ci spingono ad ampliare l'insieme de numeri naturali (**N)**: una di carattere pratico, un'altra di carattere più teorico.

1. Abbiamo definito i numeri naturali come quelli che servono per contare gli elementi di un insieme. Tali numeri non sono però adatti a risolvere gran parte dei problemi: quando ad esempio misuriamo la temperatura, il livello di un terreno sul mare, ecc... abbiamo bisogno anche di numeri negativi.
2. D'altra parte nell'insieme N non era possibile effettuare la sottrazione tutte le volte che il minuendo era minore del sottraendo.

Per superare questa situazione introduciamo allora un nuovo insieme numerico attribuendo un segno (+ o -) a tutti i numeri dell'insieme N, escluso lo 0: otteniamo i **numeri relativi (Z)**.

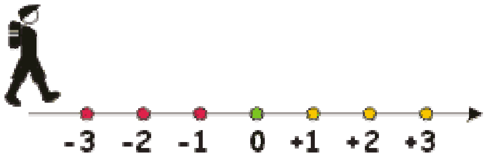
$$Z=\{...,-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$$

Le definizioni principali

Numeri concordi	numeri che hanno lo stesso segno. ad esempio i numeri +3, +5 sono concordi
Numeri discordi	numeri che hanno segno diverso. ad esempio i numeri -3, +5 sono discordi
Valore assoluto	il numero senza segno. ad esempio il valore assoluto di +5 è 5 e si scrive $\|+5\|=5$ il valore assoluto di -5 è 5 e si scrive $\|-5\|=5$
Numeri opposti	numeri con lo stesso valore assoluto, ma con segno diverso (cioè discordi). In termini operativi si possono definire opposti due numeri la cui somma è 0.

L’ordinamento dei numeri Relativi

Si comprende l'ordinamento dei numeri relativi osservando come questi numeri si dispongono sulla retta orientata:



Un numero relativo è minore di un altro se, sulla retta orientata, lo precede; viceversa, un numero relativo è maggiore di un altro se, sulla retta orientata, lo segue.

Seguendo queste regole ci si accorge che:

- se due numeri sono negativi il maggiore è quello con valore assoluto minore;
- se due numeri sono positivi il maggiore è quello con valore assoluto maggiore;
- se due numeri sono discordi il maggiore è quello con segno positivo.

Le operazioni in Z

Nell'insieme Z sono sempre possibili le operazioni di addizione e moltiplicazione.

Per quanto riguarda le operazioni inverse, invece, la sottrazione è sempre possibile in Z (al contrario di quanto accadeva in N), ma la divisione conserva le stesse restrizioni che la caratterizzavano in N (non sempre è possibile associare alla divisione tra due interi un solo numero intero che ne caratterizzi il quoziente, più spesso è necessario introdurre un secondo numero intero che rappresenti il resto della divisione).

Le operazioni in Z godono certamente delle stesse proprietà di cui godevano in N con qualche significativa aggiunta che sarà trattata dopo l'illustrazione delle operazioni stesse.

<u>L'addizione</u>

Se immaginiamo l'addizione di due numeri come la composizione di due spostamenti sulla retta dei numeri relativi di cui il segno indichi la direzione (verso destra per il segno + e verso sinistra per il segno -) e il valore assoluto il numero di passi, ci si convince facilmente che:

- La somma di ***due numeri relativi concordi*** è un numero relativo, concorde con i numeri dati, che ha come valore assoluto la somma dei valori assoluti degli addendi.
- La somma di ***due numeri relativi discordi*** è un numero relativo che ha come valore assoluto la differenza dei valori assoluti degli addendi e segno concorde al maggiore in valore assoluto.
- La somma di ***due numeri opposti*** è 0.

Esempi

- **-5 + (-8) = -(5 + 8) = -13** i due numeri sono concordi, si sommano i loro valori assoluti 5+8, si mette il segno comune (-13).
- **+5 + (-8) = -(8 - 5) = -3** i due numeri sono discordi, si sottrae il minore dal maggiore in valore assoluto (8-5), si mette il segno del maggiore in valore assoluto (-3).

La sottrazione

Per come è stata definita l'addizione la differenza tra due numeri esiste sempre e si ottiene addizionando al primo l'opposto del secondo.
Questa osservazione non banale merita una dimostrazione in appendice.
Poiché la sottrazione viene ricondotta all'addizione mediante il passaggio all'opposto essa perde in realtà la sua identità di operazione. Le due operazioni vengono a costituire un'unica operazione e pertanto in seguito si parlerà di **addizione algebrica** o di **somma algebrica**.

Esempi

- **+13 – (+9) = +13 + (-9) = +(13 – 9) = +4** la sottrazione viene ricondotta all'addizione mediante il passaggio all'opposto.

- **-7 –(-15) = -7 +15 = 8** Più brevemente, di solito, si procede eliminando le parentesi.

Il prodotto e il quoziente

Il prodotto (o il quoziente) di due numeri relativi è un numero che ha per valore assoluto il prodotto (o il quoziente) dei valori assoluti e per segno il segno più se i due numeri sono concordi, il segno meno se sono discordi.

La regola dei segni

segno dei fattori	segno del prodotto
$(+) \cdot (+)$	$+$
$(+) \cdot (-)$	$-$
$(-) \cdot (+)$	$-$
$(+) \cdot (+)$	$+$

Da dove deriva la regola dei segni?

Si può dimostrare (una dimostrazione è riportata in appendice) che la nostra scelta è obbligata se si vuole conservare la validità delle proprietà formali delle operazioni sui numeri relativi.

Si può, a questo punto, enunciare la nota regola:

in un'espressione si possono eliminare le parentesi precedute dai segni - o + nel seguente modo:

- si lasciano gli stessi segni ai termini dentro le parentesi se il segno è +
- si cambiano i segni dentro la parentesi se il segno è -.

La regola dei segni appena ricordata e la distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione giustificano l'utilizzo della regola appena ricordata.

Attenzione all'uso del segno –

Infatti esso viene utilizzato per indicare:

- il segno di un numero negativo,
- l'operazione di sottrazione,
- l'operazione di opposto di un numero.

Elevamento a potenza

Anche l'operazione di elevamento a potenza viene estesa ai numeri relativi.

Oltre a quanto già detto per i numeri naturali resta però da precisare:

1. cosa succede se la base è negativa;
2. cosa succede se è negativo l'esponente.

In base a come è stato definito il prodotto in Z si può enunciare, per la potenza ad esponente naturale di un numero non nullo la seguente regola :

- Se l'esponente è pari, allora la potenza è sempre un numero positivo:

$$(\pm a)^p = a^p$$

- Se l'esponente è dispari allora la potenza conserva il segno della base.

$$(+a)^d = +a^d$$

$$(-a)^d = -a^d$$

Esempi

- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (+4) \cdot (-2) = -8$
- $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (+4) \cdot (+4) = +16$

La regola sopra esposta è una immediata conseguenza della regola dei segni enunciata per la moltiplicazione. Nel caso particolare della base negativa, se l'esponente è dispari anche il numero dei fattori è dispari: il risultato è negativo. Se i fattori sono pari vi sono invece un numero pari di segni negativi: il risultato è positivo.

Attenzione!

Le scritture $(-2)^4$ e -2^4 rappresentano due numeri opposti, infatti la prima rappresenta, per quanto appena detto, un numero positivo +16, la seconda equivale invece a $-(2^4)=-16$

Risponderemo in altra occasione a cosa succede se l'esponente è negativo. Infatti tali potenze non possono essere definite in Z.

Le proprietà delle operazioni in Z

Nell'insieme dei numeri relativi sono definite delle operazioni interne di somma e prodotto tali che se indichiamo con a e b due generici numeri relativi, sono individuati in modo univoco altri due numeri relativi (a + b) e (a x b). Questo significa che **l'insieme Z è chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione.
Per le operazioni di somma e prodotto valgono le seguenti proprietà:

1. $a + b = b + a$ e $a \times b = b \times a$ (**proprietà commutativa**)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (**proprietà associativa**)
3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (**proprietà distributiva**)
4. Esistono due **elementi neutri** per le due operazioni che indichiamo rispettivamente con 0 e 1 tali che:
    1. a + 0 = a
    2. a x 1 = a

5. È possibile introdurre un **ordinamento totale:**
   Dati $a \neq b$, esiste uno ed un solo numero relativo $c > 0$ tale che
   $a = b + c$ ($a > b$), oppure $b = a + c$ ($a < b$).

Fino a questo punto le proprietà delle operazioni sui numeri relativi ricalcano fedelmente quelle incontrate per i numeri naturali, ma per l'insieme Z vale un'ulteriore proprietà:

6. Per ogni numero relativo a esiste sempre ed è unico un numero relativo b, **opposto** di a,
   tale che $a+b=0$ (dove 0 è lo stesso del punto 4),
   in particolare l'opposto di $(+m)$ è il numero $(-m)$.

Appendice

1 Una dimostrazione della “regola dei segni”

Conoscendo le proprietà delle operazioni + e x sull’insieme dei numeri relativi (un anello commutativo) possiamo dare una semplice dimostrazione delle quattro regole di moltiplicazione dei segni spesso presentate come definizioni o, peggio, convenzioni.
Identificando i numeri relativi positivi con i numeri naturali, osserviamo che la definizione di prodotto incontrata in N ci porta a concludere che

$$(+) \cdot (+) = (+)$$

e proviamo a derivare da questa le altre regole di moltiplicazione per i segni.

1. Abbiamo dimostrato in precedenza che

$$0 = a\cdot 0$$

$$a\cdot 0 = a\cdot[b+(-b)]$$

$$a\cdot[b+(-b)] = ab+a\cdot(-b),$$

   quindi

$$ab+a\cdot(-b)=0,$$

   cioè

$$a\cdot(-b) = -ab$$

   e quindi

$$(+) \cdot (-) = (-)$$

2. In modo analogo risulta:

$$(-a)\cdot b = -ab,$$

   cioè

$$(-) \cdot (+) = (-)$$

3. Consideriamo ora la seguente espressione:

$$[(-a) + (+a)] \cdot (-b)$$

   essendo $[(-a) + (+a)] = 0$, tutta l’espressione deve essere tutta uguale a 0 perché qualunque numero moltiplicato per zero diventa zero (lo abbiamo dimostrato per i numeri naturali, ma potremmo rifarlo allo stesso modo per i relativi), cioè

$$[(-a) + (+a)] \cdot (-b) = 0$$

che per la proprietà distributiva diventa

$$[(-a) \cdot (-b)] + [(+a) \cdot (-b)] = 0$$

sappiamo già che l’espressione $[(+a) \cdot (-b)] = -ab$ perché dimostrato in precedenza, quindi

$$[(-a) \cdot (-b)] + (-ab) = 0$$

ma l’esistenza del simmetrico ci garantisce che

$$[(-a) \cdot (-b)] = ab$$

e quindi

$$\mathbf{(-) \cdot (-) = (+)}$$

La dimostrazione è semplice, e anche una semplice verifica con una coppia di numeri può essere più convincente di qualunque *regola*.

2 La differenza in Z

Si è detto che la differenza tra due numeri si ottiene addizionando al primo l'opposto del secondo. Ma qual è il motivo?

In particolare, perché (+a) – (+b) = (+a) + (-b) ?

Chiamiamo c il risultato della differenza tra +a e +b,

(+a) – (+b) = c

allora, per la definizione di differenza,

c + (+b) = +a

le leggi di cancellazione (dimostrate in N e valide ovviamente anche in Z) ci permettono di scrivere:

c + (+b) + (-b) = +a + (-b)

il postulato sugli opposti ci permette di scrivere:

c + 0 = +a + (-b)

che per il postulato sull'elemento neutro della somma diventa:

c = +a + (-b)

Alle due uguaglianze in grassetto è possibile applicare la proprietà transitiva, ottenendo

(+a) – (+b) = +a + (-b)

che era quanto volevamo dimostrare.

Con il medesimo schema dimostrativo è possibile dimostrare facilmente anche l'uguaglianza

(+a) – (-b) = (+a) + (+b)

che completa la dimostrazione della regola di calcolo della differenza tra due numeri relativi.